MATEMÁTICA 4

José Enrique Balladares Bastidas
Dennis Mauricio Jiménez Bonilla
Juan Alipio Sobenis Cortez

Ing. Ind. José Balladares Bastidas Msc.

Psic Org. Dennis Jiménez Bonilla Msc.

Lcdo. Juan Sobenis Cortez Msc.

ISBN: 978-9942-8949-9-1

9 789942 894991

MATEMÁTICA

PRIMERO DE BACHILLERATO

Autores:

José Balladares Bastidas
Facultad de ciencias jurídicas y sociales de la educación
Universidad Técnica de Babahoyo
jballadares@utb.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-7703-4386.

Dennis Jiménez Bonilla
Facultad De Ciencias Jurídicas Y Sociales De La Educación
Universidad Técnica De Babahoyo
Djimenez@utb.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-0340-9376

Juan Sobenis Cortez
Universidad Técnica De Babahoyo
jsobeniz@utb.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-1397-0677

EDITORIAL
UNIVERSIDAD
TÉCNICA DE BABAHOYO

Primera Edición, agosto 2020

Gobernabilidad y participación ciudadana: GADS de Babahoyo
ISBN: 978-9942-8949-9-1 (eBook)

Editado por:
Universidad Técnica de Babahoyo
Avenida Universitaria Km 2.5 Vía a Montalvo
Teléfono: 052 570 368

Babahoyo, Ecuador
www.utb.edu.ec
E-mail: editorial@utb.edu.ec

Este texto ha sido sometido a un proceso de evaluación por pares externos.

Diseño y diagramación, montaje y producción editorial
Universidad Técnica de Babahoyo

Babahoyo – Los Ríos – Ecuador

INDICE

INTRODUCCIÓN

Aprender matemáticas nos enseña a pensar de una manera lógica y a desarrollar habilidades para la resolución de problemas y toma de decisiones. Gracias a ellas también somos capaces de tener mayor claridad de ideas y del uso del lenguaje. Con las matemáticas adquirimos habilidades para la vida y es difícil pensar en algún área que no tenga que ver con ellas. Todo a nuestro alrededor tiene un poco de esta ciencia. (Leo., 2012)

Este libro es un instrumento didáctico elemental para los estudiantes, en el cual ellos podrán realizar todas las actividades requeridas.

Este libro consta de variedades de temas que se encuentra en la planificación de dicho curso y de algunos temas adicionales donde ayudará al estudiante avanzar hacia el próximo año lectivo.

Las actividades y los deberes inscritos en cada tema son profundizados de acorde a la materia asignada por cada tema.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS COMPLEJAS

Concepto

Una expresión algebraica contiene es un conjunto de letras, números y signos.

En este curso las expresiones algebraicas estarán formadas con los casos de factorización y productos notables, donde podemos efectuar junto con las operaciones básicas. (S., 2020)

Recordemos

Factorización es lo contrario de **Productos notables.**

Ejemplos:

Simplificación de fracciones algebraicas

Trinomio Cuadrado Perfecto

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}=\frac{(x+2)^2}{(x+2)\cdot(x-2)}=\frac{(x+2)}{(x-2)}$$

Diferencia de Cuadrados

Trinomio simple

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2-4}=\frac{(x+3)(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x+3}{x-2}$$

Diferencia de Cuadrados

NOTA: Para simplificar las expresiones deberán ser términos iguales.

Simplificación de fracciones algebraicas en suma y resta

PASOS:

1.- Se reconoce fracción a fracción los casos de factorización

2.- Se efectúa sacando MCM

3.- Se procede a realizar cada fracción (primero dividiendo y luego multiplicar)

4.- Suma de términos iguales

Factor común → $\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x^2+x}} + \frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{x^2+3x+2}}$ ← Trinomio simple

$$\frac{2}{x(x+1)} + \frac{3}{(x+2)(x+1)} = \frac{2(x+2)+3\,(x)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{2x+4+3x}{x(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{5x+3}{x(x+1)(x+2)}$$ **Solución**

Diferencia de cuadrados → $\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x^2-4}} - \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x^2+5x+6}}$ ← **Trinomio Simple**

$$\frac{\mathbf{3}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{(x-2)(x+2)}} - \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{(x+3)(x+2)}} = \frac{\boldsymbol{3x\,(\,x+3\,)-x\,(\,x-2)}}{\boldsymbol{(x+2)(x-2)(x+3)}} = \frac{\boldsymbol{3x^2+3x-x^2+2x}}{\boldsymbol{(x+2)(x-2)(x+3)}} =$$

$$\frac{\boldsymbol{2x^2+5x}}{\boldsymbol{(x+2)(x-2)(x+3)}} = \frac{\boldsymbol{x(2x+5\,)}}{\boldsymbol{(x+2)(x-2)(x+3)}}$$ **Solución**

ACTIVIDAD Nº 1

Expresiones algebraicas complejas

1.- Simplificar las siguientes expresiones

$$\frac{x^2-4}{x^2+4x+4} =$$

$$\frac{x^2-3x}{x^2-5x+6} =$$

$$\frac{x^2-2x-15}{x^2-4x-5}=$$

$$\frac{x^3-27}{x^2-9}=$$

$$\frac{x^2+6x+8}{x^2+5x+6}=$$

2.- Simplificar

$$\frac{x^2-4}{x^2+4x+3} * \frac{x^2+3x+2}{x-2} =$$

$$\frac{x^2+8x+7}{x^2+6x+5} * \frac{x^2+5x}{x} =$$

$$\frac{x^2-9}{x^2+3x+2} * \frac{x^2+x}{x+3} =$$

$$\frac{x^3-8}{x^2+7x+6} * \frac{x^2+6x}{x^2-2x} =$$

$$\frac{x^2+13x+36}{x^2-16} * \frac{x^2}{x^2-81} =$$

3.- Reducir expresiones algebraicas

$$\frac{2}{x^2+5x+4} + \frac{3}{x^2+3x+2} =$$

$$\frac{3}{x^2+x} + \frac{4}{x^2+7x+6} =$$

$$\frac{3}{x^2+6x+8} + \frac{7}{x^2-16} =$$

$$\frac{4x}{x^2-25} + \frac{x}{x^2+6x+5} =$$

$$\frac{3x}{x^2+5x+6} - \frac{2x}{x^2+4x+3} =$$

$$\frac{6x}{x^2+9x+20}-\frac{5x}{x^2+4x}=$$

$$\frac{6}{x^2+6x+5}+\frac{3}{x^2-25}=$$

$$\frac{6}{x^2+6x+9}+\frac{5}{x^2-9}=$$

$$\frac{2}{x^2+7x+6}+\frac{7}{x^2-6x}=$$

$$\frac{5x}{x^2-1}+\frac{2}{x^2-x}=$$

DEBER Nº 1

Expresiones algebraicas complejas

1.- Simplificar las siguientes expresiones

$\boldsymbol{a)}\ \frac{x^2-6}{x^2+8x+12} =$

$\boldsymbol{b)}\ \frac{x^2-4}{x^2+12x+32} =$

$\boldsymbol{c)}\ \frac{x}{x^2+8x} =$

$\boldsymbol{d)}\ \frac{x^2-6x}{x^2-5x-6} =$

$\boldsymbol{e)}\ \frac{x^2+7x+6}{x^2+9x+18} =$

2.- Simplificar

a) $\frac{x^3-8}{x} * \frac{x^2+2x}{x^2-4} =$

b) $\frac{x^4-16}{x+4} * \frac{x^2+x}{x^2+2x+1} =$

c) $\frac{x^2+8x+7}{x+1} * \frac{x-7}{x^2-49} =$

d) $\frac{x^2+5x+6}{x-4} * \frac{x^2+x-20}{x^2-25} =$

e) $\frac{x^2+8x}{x} * \frac{x}{x^2-64} =$

f) $\frac{x^2+x}{x} * \frac{x^2+x-2}{x^2-1} =$

g) $\frac{x^3+64}{x} * \frac{3x}{x^2-16} =$

h) $\frac{x^2+2x}{x} * \frac{x+1}{x^2+3x+2} =$

3.- Reducir expresiones algebraicas

$a) \frac{4}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+4x+3} =$

$b) \frac{x}{x^2+3x+2} + \frac{2x}{x^2+3x} =$

$c) \frac{5x}{x} + \frac{2x}{x^2-9} =$

$\boldsymbol{d)}\ \frac{5x}{x^2+2x} + \frac{2x}{x^2+3x} =$

ECUACIÓN E INECUACIÓN

Ecuación

Una ecuación es una igualdad que se cumple para algunos valores de las letras y deberá cumplir la siguiente relación **X = R.**

Términos de una ecuación

Primer miembro   Segundo miembro

$$\overline{2x - 3} = \overline{3x + 2}$$

Términos

Ejemplo

3x + 2 = 2x + 4
3x – 2x = 4 – 2
x = 2

COMPROBACIÓN
3x + 2 = 2x + 4
3(2) + 2 = 2(2) + 4
6 + 2 = 4 + 4
8 = 8

$$\boldsymbol{\frac{x+3}{2} = \frac{x-2}{3}}$$

3x + 9 = 2x – 4
3x – 2x = – 4 – 9
x = –13

COMPROBACIÓN

$$\boldsymbol{\frac{x+3}{2} = \frac{x-2}{3}}$$

$$\frac{-13+3}{2} = \frac{-13-2}{3}$$

$$\frac{-10}{2} = \frac{-15}{3}$$

– 5 = – 5

4 (x + 1) = 3 (x – 1)
4x + 4 = 3x – 3
4x – 3x = – 3 – 4
x = – 7

COMPROBACIÓN
4 (x + 1) = 3 (x – 1)
4 (–7 + 1) = 3 (–7 –1)
4(–6) = 3 (–8)
– 24 = – 24

$$\frac{x}{2} + 1 = \frac{2x}{3} + \frac{1}{2}$$

mcm = 6

$$3x + 6 = 4x + 3$$
$$3x - 4x = 3 - 6$$
$$-x = -3$$
$$x = 3$$

COMPROBACIÓN

$$\frac{x}{2} + 1 = \frac{2x}{3} + \frac{1}{2}$$
$$\frac{3}{2} + 1 = \frac{2(3)}{3} + \frac{1}{2}$$
$$\frac{5}{2} = \frac{6}{3} + \frac{1}{2}$$
$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

Nota:

1.- Si un número está positivo pasa al otro lado negativo y viceversa.

2.- Si un número está multiplicando pasa al otro lado dividiendo viceversa.

3.- Si un número está potencia pasa al otro lado raíz y viceversa.

Cuando es **fracción a fracción** este se multiplica en **X** y se resuelve normalmente

Cuando es **fracción en suma o resta** se realizará un **MCM**

Inecuación

Es una expresión que indica que una es mayor o menor que otra. En estas expresiones se utilizan signos como:

- Mayor que (>)
- Mayor o igual que (≥)
- Menor que (<)
- Menor o igual que (≤)

Todas ellas son **desigualdades** a las que llamamos **inecuaciones**. La solución de cada una de estas inecuaciones es un conjunto de valores que hace que la desigualdad sea cierta. (concepto de inecuacion, 2021)

Grafica

Para graficar una inecuacion debemos tener en cuenta lo siguiente:

* Se grafica en una recta numerica

* Los simbolos <,> significa que se gráfica en parentesis y

* Los simbolos ≤,≥ significa que se gráfica en corchetes.

Ejemplos

***a*) Simple**

$\mathbf{3x - 2 > 7}$

$3x > 7 + 2$

$(3 , \infty)$

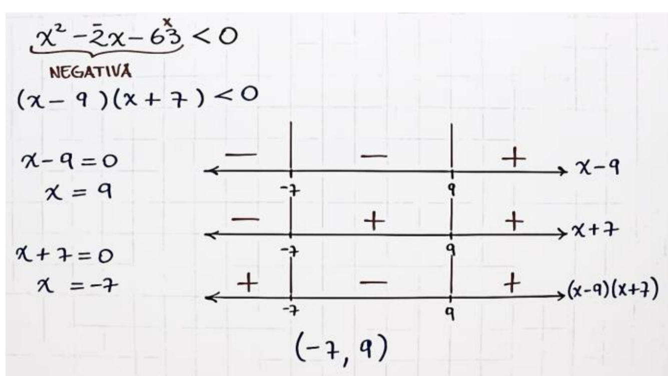
$3x > 9$

$x > 9/3$

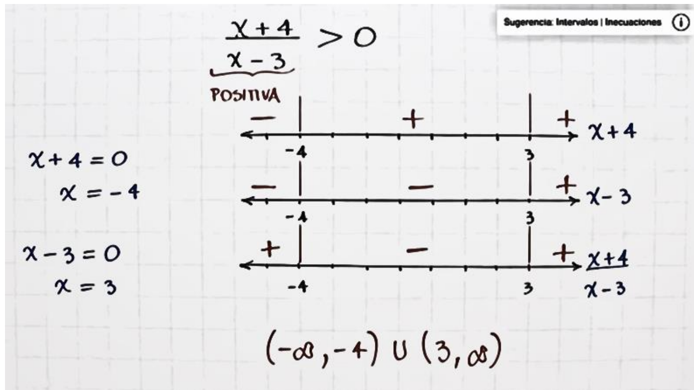
$x > 3$

***b*) Cuadrática**

En la gráfica cuando es **(>)** será **POSITIVA** y es **(<)** será **NEGATIVA.**



$\boldsymbol{c}$) **Racional**



<u>ACTIVIDAD N°2</u>

Ecuación e inecuación
Resolver y graficar si es necesario los siguientes ejercicios

$\boldsymbol{a)\ 2(x+1) = 5(x-2)+1}$

$\boldsymbol{b)\ \frac{3x}{2} + \frac{1}{5} = 3 - \frac{x}{3}}$

$\boldsymbol{c)\ \frac{x+5}{3} = \frac{2x-3}{4}}$

$\boldsymbol{d)\ 5(x+2) > x + 2(x-1)}$

$\boldsymbol{e)\ \frac{x+3}{x-2} > 0}$

$\boldsymbol{f)}\ \boldsymbol{x^2 + 8x - 20 < 0}$

$\boldsymbol{h)}\ \boldsymbol{|3x + 8| \geq x - 2}$

$\boldsymbol{i)}\ \boldsymbol{3x - 5 < x + 3 \geq x}$

$\boldsymbol{j)}\ \boldsymbol{\frac{x+1}{x^2+4x+3} < 0}$

<u>DEBER Nº 2</u>

Ecuación e inecuación

Resolver y graficar si es necesario los siguientes ejercicios

$\boldsymbol{a)}\ \boldsymbol{\frac{3x + 2}{5} = \frac{x - 1}{3}}$

$\boldsymbol{b)}\ \boldsymbol{3(2x - 1) = 4(x + 3) - 2}$

$\boldsymbol{c)}\ \boldsymbol{\frac{5x}{3} + \frac{2}{5} = 1 - \frac{7x}{2}}$

$\boldsymbol{d)}\ \boldsymbol{3(x - 3) < 2x + 5(x - 1)}$

$\boldsymbol{e)}\ \boldsymbol{\frac{x + 2}{3x - 1} > 0}$

$f)\ x^2 + x - 20 \geq 0$

$h)\ |4x + 3| \ \geq 2x - 1$

$i)\ 2x - 1 \ < x + 2 \ \geq 4x + 1$

$j)\ \frac{x+3}{x^2+5x+4} \ > 0$

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Según (Martha, 2019) cuando dividimos un polinomio por otro polinomio, el resultado es otro polinomio combinado con número y cumple las siguientes características:

El polinomio resultante es de grado menor que el polinomio que fue dividido.

Sus coeficientes resultan de dividir cada uno de los coeficientes del polinomio entre el otro polinomio

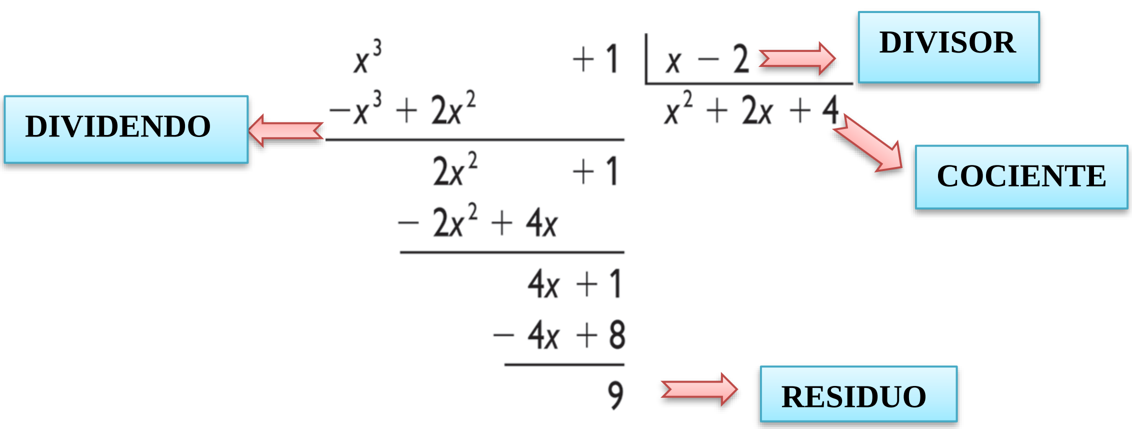
Se dejan las mismas partes literales en pocas ocasiones

División sintética

Procedimiento	Ejemplo
Escribimos los dos polinomios ordenados según las potencias decrecientes de x. Si el polinomio dividendo es incompleto, ponemos ceros en blanco correspondientes a los términos que faltan.	Dividimos el polinomio $3x^5+2x^3-x^2-4$ entre el polinomio x^3+2x^2+1 $3x^5 + 2x^3 - x^2 -4 \quad \underline{\lfloor\ x^3+2x^2+1\ }$
Dividimos el primer monomio del dividendo (en este	

Ejemplo

$$\frac{\boldsymbol{x^3+1}}{\boldsymbol{x-2}} = x^2+2x+4$$



Método de ruffini

El método de ruffini se realiza para simplificar la división sintética. Este método es uno de los casos especiales de factorización.

Procedimiento	Ejemplo
Escribimos los coeficientes de los términos del dividendo uno a continuación del otro. Si el polinomio dividendo es incompleto, ponemos un 0 en el lugar correspondiente a cada término que falte.	Dividimos $6x^3 - 4x^2 + 2$ entre x - 3. $\begin{array}{cccc} 6 & -4 & 0 & 2 \end{array}$
Escribimos el término independiente del divisor cambiado de signo a la izquierda de estos coeficientes.	$\begin{array}{c\|cccc} & 6 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$
Bajamos el primer coeficiente, 6, que se multiplica por 3 y el resultado, 18, se suma al segundo coeficiente del dividendo.	$\begin{array}{c\|cccc} & 6 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & \otimes & 18 & \oplus & \\ \hline & 6 & 14 & & \end{array}$
La suma obtenida, 14, se multiplica por 3 y el resultado se suma el tercer coeficiente del dividendo.	$\begin{array}{c\|cccc} & 6 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & \otimes & 18 & 42 & \oplus \\ \hline & 6 & 14 & 42 & \end{array}$
Continuamos este proceso hasta que se acaben los coeficientes de los términos del polinomio dividendo.	$\begin{array}{c\|cccc} & 6 & -4 & 0 & 2 \; \oplus \\ 3 & \otimes & 18 & 42 & 126 \\ \hline & 6 & 14 & 42 & 128 \end{array}$
El último resultado obtenido, 128, es el resto de la división, los restantes (6, 14, 42) son los coeficientes del polinomio cociente. Tendremos en cuenta que el grado del coeficiente es inferior en una unidad al grado del dividendo, pues el divisor es de grado 1	R = 128 $C(x) = 6x^2 + 14x + 42$

Ejemplo

$$\frac{5x^4-3x^3+2x^2-7x+3}{x-1} = 5x^3+2x^2+4x-3$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 5 & -3 & 2 & -7 & 3 \\ 1 & & 5 & 2 & 4 & -3 \\ \hline & 5 & 2 & 4 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

RESTO

COCIENTE $5x^3+2x^2+4x-3$

Teorema del factor

El teorema del factor es una consecuencia inmediata del TEOREMA DEL RESTO:

Un polinomio **P(x)** tiene un factor **(x - a)**, y si y solo si **x = a** es una raíz de **P**. Es decir **P(a)= 0**

Así, el polinomio **P(x)** puede expresarse de la forma **P (x) = (x - a) · C (x)**, donde **(x - a)** es un factor de **P(x)**.

Ejemplo

Comprueba si (x + 2) es un factor de los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$

Comprensión: Calculamos el valor numérico de x = - 2 en los polinomios.

Resolución: a) $P(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 2 + 2 = 0 \rightarrow (x + 2)$ es un factor de P (x). Para hallar el otro factor, dividiremos, en este caso, aplicando la regla de Ruffini:

	1	2	1	2
-2		-2	0	-2
	1	0	1	$\boxed{0}$

↓

$P(x) = (x + 2) \cdot (x^2 + 1)$

Método de horner

Procedimiento:

1. Colocamos los coeficientes del dividendo completo y ordenado de forma descendente.
2. Colocamos los coeficientes del divisor todos cambiados de signos menos el primero que lo conserva, también, ordenados de forma descendente.
3. Colocamos los coeficientes del cociente. Calculamos cada uno dividiendo la suma de la columna respectiva entre el primero coeficiente del divisor.
4. Colocamos los coeficientes del resto. El número de columnas está dado por el grado del divisor.

Dividimos:

a. $\dfrac{6x^6 + x^5 - 2x^3 + 3x^2 - x + 4}{3x^3 - x^2 + 2x + 1}$

b. $\dfrac{2x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 4x + 8}{2x^2 + x - 2}$

Solución:

Ordenemos y completemos

a.

3	6	1	0	-2	3	-1	4
1		2	-4	-2			
-2			1	-2	-1		

ACTIVIDAD Nº 3

División de polinomios - división sintética
*** Realizar las siguientes divisiones**

a) $\frac{x^2 + 2x - 8}{x+1} =$

b) $\frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 5}{x-1} =$

c) $\frac{2x^3 + 3x - 10}{x+2} =$

d) $\frac{3x^3 - 5x^2 + 3}{x-1} =$

e) $\frac{x^4 + 3x - 1}{x+1} =$

f) $\frac{x^4 + 2x^2 - 25}{x+2} =$

g) $\frac{x^6 - 2x^4 + 5x - 1}{x-1} =$

h) $\frac{x^8 - 3x^5 + 5x - 2}{x+1} =$

DEBER Nº 3

División de polinomios - división sintética

*** Realizar las siguientes divisiones**

a) $\frac{x^2+3x-5}{x+1} =$

b) $\frac{x^3-3x^2+5x-1}{x-1} =$

c) $\frac{3x^3+4x-8}{x+2} =$

d) $\frac{2x^3-7x^2+1}{x-1} =$

e) $\frac{3x^4+5x-6}{x+1} =$

f) $\frac{2x^4+5x^2-10}{x+2} =$

g) $\frac{x^6-4x^4+3x-7}{x-1} =$

h) $\frac{x^8-4x^5+2x-1}{x+1} =$

ACTIVIDAD Nº 4

División de polinomios - método de Ruffini

*** Realizar las siguientes ecuaciones de fracciones**

a) $\frac{x^2+2x-8}{x+1} =$

b) $\frac{x^3-2x^2+3x-5}{x-1} =$

c) $\frac{2x^3+3x-10}{x+2} =$

d) $\frac{3x^3-5x^2+3}{x-1} =$

e) $\frac{x^4 + 3x - 1}{x+1} =$

f) $\frac{x^4 + 2x^2 - 25}{x+2} =$

g) $\frac{x^6 - 2x^4 + 5x - 1}{x-1} =$

h) $\frac{x^8 - 3x^5 + 5x - 2}{x+1} =$

DEBER Nº 4

División de polinomios - método de Ruffini

*** Realizar las siguientes divisiones**

a) $\frac{x^2 + 3x - 5}{x+1} =$

b) $\frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 1}{x-1} =$

c) $\frac{3x^3+4x-8}{x+2}=$

d) $\frac{2x^3-7x^2+1}{x-1}=$

e) $\frac{3x^4+5x-6}{x+1}=$

f) $\frac{2x^4+5x^2-10}{x+2}=$

g) $\frac{x^6-4x^4+3x-7}{x-1}=$

h) $\frac{x^8-4x^5+2x-1}{x+1}=$

ACTIVIDAD Nº5

División de polinomios – teorema del factor

*** Realizar las siguientes divisiones y comprobar si es divisible**

a) $x^{2} + 2x - 8$

b) $x^3 - x^2 - 4x + 4 =$

c) $2x^3 + 3x - 63 =$

d) $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 =$

e) $x^4 + 3x - 10 =$

f) $5x^3 - 2x^2 - 3 =$

g) $3x^3 - 5x^2 + 3 =$

h) $x^4 + 2x^2 - 25 =$

DEBER Nº5

División de polinomios – teorema del factor

*** Realizar las siguientes divisiones y comprobar si es divisible**

a) $x^{2} - 4$

b) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 =$

c) $x^2 - 9 =$

d) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 =$

e) $x^2 + x - 6 =$

f) $2x^4 - 8x^2 =$

g) $2x^3 - 4x^2 =$

h) $x^4 + 3x^2 - 15 =$

ACTIVIDAD Nº 6

División de polinomios – método de horner

Realizar las siguientes divisiones

a) $\frac{8x^4-2x^3-9x^2+7x+1}{4x^2+x-2} =$

b) $\frac{6x^4-7x^3+11x^2-5}{3x+2} =$

c) $\frac{6x^4-x^3+x^2-5x+1}{2x-1} =$

d) $\frac{25x^5-x^2+4x^3-5x^4+8}{5x^2-3+2x} =$

e) $\frac{3x^4+5x-6}{x+1} =$

f) $\frac{2x^4+5x^2-10}{x+2} =$

g) $\frac{15x^5-11x^4+21x^3-x^2+3}{3x^2-x+2} =$

h) $\frac{8x^5+4x^4+6x^2+6x-1}{4x^2-4x+2} =$

DEBER Nº 6

División de polinomios – método de horner

Realizar las siguientes divisiones

a) $\frac{4x^4+9x^3+6x^5-1}{2x^3+x-1} =$

b) $\frac{x^5-5x-4}{(x+1)^2} =$

c) $\frac{x^4-3x+5x^2-3x^3+4}{x^2-3x+4} =$

d) $\frac{5x^3+6x^4-1}{3x^2-2+x} =$

e) $\frac{5x^4+3x-6}{x+1} =$

f) $\frac{x^4+3x^2-10}{x+2} =$

g) $\frac{2x^5+7x^4-50x^3-173x^2-22x+60}{x^2-2x-15} =$

h) $\frac{8x^5+14x^4+5x^3+16x^2+6+3x+2}{4x^2+x+3} =$

LOGARITMO

Concepto

El logaritmo de un número, en una base dada, es el exponente al cual se debe elevar la base para obtener el número. (profesor en linea, 2021)

$$\log_a x = y \Rightarrow a^y = x$$

Lectura

Se lee "logaritmo de x en base a es igual a y ", pero debe cumplir con la condición general de que a (la base) sea mayor que cero y a la vez distinta de uno :

$a > 0$

$a \neq 1$

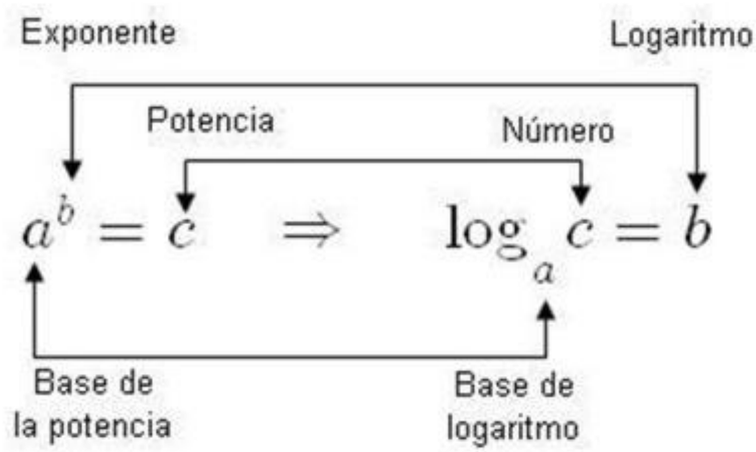
Para aclarar el concepto, podríamos decir que logaritmo es solo otra forma de expresar la potenciación, como en este ejemplo:

$$3^2 = 9 \Rightarrow \log_3 9 = 2$$

Que leeremos: logaritmo de 9 en base 3 es igual a 2

Transformación

El gráfico siguiente nos muestra el nombre que recibe cada uno de los elementos de una potencia al expresarla como logaritmo:



Ejemplos

De potencia a logaritmo

$\mathbf{5^2 = 25} \gg \log_5 25 = 2$

$\mathbf{3^4 = 81} \gg \log_3 81 = 4$

De logaritmo a potencia

$\mathbf{\log_8 512 = 3} \gg 8^3 = 512$

$\mathbf{\log_4 16 = 2} \gg 4^2 = 16$

OPERACIONES BÁSICAS CON LOGARITMO

Propiedades de logaritmos

Definición y Notación	
$\boxed{\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x \quad ,\forall x \in IR^+ \wedge b \neq 1}$	
Propiedades	
$Log_b 1 = 0$	Logaritmo de uno es cero
$Log_b b = 1$	Logaritmo de la base es igual a uno
$Log_b (b^n) = n$	Log de potencia de la base es igual al exponente
$Log_b (m \bullet n) = Log_b m + Log_b n$	Logaritm de producto
$Log_b \left(\frac{m}{n}\right) = Log_b m - Log_b n$	Logaritm de cuociente
$Log_b (m^n) = n \bullet Log_b m$	Logaritmo de Potencia
$Log_b (\sqrt[n]{m}) = \frac{Log_b m}{n}$	Logaritmo de Raiz
$Log_b (x) = \frac{Log_c (x)}{Log_c (b)}$	Cambio de BASE

Ejemplos Descomponer en números primos

$$\log 2 + \log 5 - \log 4 + \log 15$$

= log 2 + log 5 – log 2^2 + (log 3 + log 5)

= log 2 + log 5 – 2 log 2 + log 3 + log 5

= (log 5 + log 5) + (log 2 – 2 log 2) + log 3 ⟵ Sumar factores iguales

= 2 log 5 – log 2 + log 3

$$\log 20 - \log 5 - \log 4 + \log 6$$

= (log2 + log2 + log5) – log5 – (log2 + log2)

= log 2 + log 2 + log 5 – log 5 – log 2 – log 2

= (log2 + log2 - log2 – log2) + (log5 – log5)

= 0

Nota:

Suma y resta. - Para efectuar estas operaciones de logaritmos deben ser iguales. Si los logaritmos no son iguales debemos no se podrá efectuar.

Descomponer. - Se trata en factorizar en números primos un número, por ejemplo: 15= 3x5; 100= 2x2x5x5

Potencia. - La potencia de un logaritmo se convierte en una base.

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Concepto

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas ecuaciones en la que la incógnita aparece afectada por un logaritmo.

Para resolver ecuaciones logarítmicas vamos a tener en cuenta:

Ejemplos

FASE 1

$$\log_5(x+3) = 1$$

$$5^1 = x + 3$$

$$x = 5 - 3$$

$$x = 2$$

FASE 2

$$\log_2(3x-5) = \log_2(x+1)$$

3 x – 5 = x + 1

3x – x = 1 + 5

2x = 6

X = 6/2

X= 3

FASE 3

$$\log(x+6) = 1 + \log(x-3)$$
$$\log(x+6) - \log(x-3) = 1$$
$$\log\frac{x+6}{x-3} = 1$$
$$10^1 = \frac{x+6}{x-3}$$
$$10(x-3) = x+6$$
$$10x - 30 = x+6$$
$$9x = 36$$
$$x = 4$$

FASE 4

$$\log(x-3) = \log 2 + \log(x-2)$$
$$\cancel{\log}(x-3) = \cancel{\log}[2(x-2)]$$
$$x - 3 = 2x - 4$$
$$3x = -1$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

<u>ACTIVIDAD Nº 7</u>

Ecuación logarítmica

*** Resolver las siguientes ecuaciones**

FASE 1

$\log_2(6x+2) = 5$ $\qquad$ $\log_3(5x+1) = 4$ $\qquad$ $\log_4(x^2+3) = 2$

FASE 2

$\log_2(2x+1) = \log_2 x$ $\qquad$ $\log_3(4x+1) = \log_3(x-2)$ $\qquad$ $\log_4(x^2+3) = \log_4 7$

FASE 3

$\log_3(x-1) = 1 - \log_2 4$

$\log_5(x-4) = 1 - \log_5(x+4)$

$\log_5(2x+3) = 1 - \log_5(x-2)$

$\log_5(x^2+x) = 1 + \log_5(x)$

FASE 4

$\log_5(x+3) + \log_5 x = \log_5(x-2)$

$\log_5(x+1) = \log_5(x+5) + \log_5 x$

$\log_5(x+2) - \log_5 x = \log_5(x-1)$ $\log_5(x+4) = \log_5(x+6) - \log_5 x$

DEBER Nº 7

Ecuación logarítmica

*** Resolver las siguientes ecuaciones**

FASE 1

$\log_5(3x+2) = 2$ $\log_2(x+2) = 3$ $\log_3(x^2-7) = 2$

FASE 2

$\log_2(x+2) = \log_2 x$ $\log_3(3x+5) = \log_3(2x-1)$ $\log_4(x^2+5) = \log_4 21$

FASE 3

$\log_3(x-2) = 1 - \log_2 3$

$\log_5(x+1) = 1 - \log_5(x+3)$

$\log_5(3x+1) = 1 - \log_5(x-1)$

$\log_5(x^2+2x) = 1 + \log_5(x)$

FASE 4

$\log_5(2x+5) + \log_5 x = \log_5(x-1)$

$\log_5(x+2) = \log_5(x+6) + \log_5 x$

$\log_5(x+3) - \log_5 x = \log_5(2x-5)$

$\log_5(x+3) = \log_5(x+1) - \log_5 2x$

S.E.L) DETERMINANTES

Concepto

El método de determinantes se trata en buscar la incógnita por medio de los coeficientes de las variables establecidas por el sistema de ecuaciones.

Construcción

Para construir estos sistemas se deberá tomar en cuenta el número de incógnitas y el número de ecuaciones que da el sistema.

Número de ecuaciones = Número de incógnitas

Ejemplos

Con dos variables

$$\left|\begin{array}{l} \boldsymbol{x + 3y = 7} \\ \mathbf{3x - y = 1} \end{array}\right.$$

ΔD

$$\begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} = |-1-(9)| \\ = -1-9 = -10 \end{array}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta\mathbf{x}}{\Delta\mathbf{D}} = \dfrac{-10}{-10} \gg \boldsymbol{x = 1} \\ y = \dfrac{\Delta\mathbf{y}}{\Delta\mathbf{D}} = \dfrac{-20}{-10} \gg \boldsymbol{y = 2} \end{cases}$$

ΔX

x	y
7	3
1	-1

= 1*(–7) – (3)*l
= – 7 – 3 = –10

Δy

x	y
1	7
3	1

= l *(1) – (21)*l
= – 20

SE MULTIPLICA EN FORMA DE CRUZ

- Con tres variables

$$\begin{aligned} &x + 3y + z = 6 \\ &3x - y + 2z = 6 \\ &x - y + z = 2 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta x}{\Delta D} = \dfrac{-4}{-4} \gg x = 1 \\ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta D} = \dfrac{-4}{-4} \gg y = 1 \\ z = \dfrac{\Delta z}{\Delta D} = \dfrac{-8}{-4} \gg z = 2 \end{cases}$$

ΔD

x	y	z
1	3	1
3	–1	2
1	–1	1
1	3	1
3	–1	2

→ = (–1 – 3 +6)
– (–1–2 +9)
= (2) – (6)
= 2 – 6
= – 4

ΔX

x	y	z
6	3	1
6	–1	2
2	–1	1
6	3	1
6	–1	2

= (–6 – 6 +12)
– (–2–12 +18)
= (0) – (4)
= 0 – 4
= – 4

Δy

x	y	z
1	6	1
3	6	2
1	2	1
1	6	1
3	6	2

= (6 +6 +12)
– (6 +4 +18)
= (24) – (28)
= 24 – 28
= – 4

ΔZ

x	y	Z
1	3	6
3	–1	6
1	–1	2
1	3	6
3	–1	6

= (–2 – 18 +18)
– (–6 –6 +18)
= (– 2) – (6)
= – 2 – 6
= – 8

ACTIVIDAD Nº 8

Método por determinantes

Realizar los siguientes sistemas y encontrar sus incógnitas

$$\left|\begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ 4x - y = 3 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} x + 2y = 6 \\ 3x - 2y = 2 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 6 \\ 5x - y + z = 5 \\ 6x - 2y + 3z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 5y + z = 17 \\ x - y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 5 \end{cases}$$

<u>DEBER Nº 8</u>

Método por determinantes

Realizar los siguientes sistemas y encontrar sus incógnitas

$$\left| \begin{array}{l} \boldsymbol{x + 4y = 6} \\ \mathbf{3\,x - y = 5} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \boldsymbol{3x + y = 12} \\ \mathbf{2\,x - y = 3} \end{array} \right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \mathbf{x + y + z = 6} \\ \mathbf{2x - 3y + z = 0} \\ \mathbf{2x - y + 3z = 8} \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \mathbf{x + 3y + z = 5} \\ \mathbf{2x - y + 3z = 4} \\ \mathbf{x - y + 2z = 2} \end{array}\right.$$

(S.E.L) MÉTODO POR GAUSS GAUSSIANA

Concepto

El método de GAUSS GAUSSIANA es similar al de determinantes. Este método se trata en buscar la incógnita por medio de los coeficientes de las variables establecidas por el sistema de ecuaciones.

Construcción

Para construir estos sistemas se deberá tomar en cuenta el número de incógnitas y el número de ecuaciones que da el sistema.

Número de ecuaciones = Número de incógnitas

2x2

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

3x3

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$$

Ejemplos

Con dos variables

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + 3y = 7} \\ \mathbf{3x - y = 1} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & \mathbf{7} \\ 3 & -1 & \mathbf{1} \end{vmatrix} \Rightarrow -3F_1 + F_2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & \mathbf{7} \\ 0 & -10 & \mathbf{-20} \end{vmatrix} \Rightarrow -1/10\, F_2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & \mathbf{7} \\ 0 & 1 & \mathbf{2} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow -3F_1 + F_2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & \mathbf{2} \end{vmatrix}$$

Solución// x = 1 ; y = 2

Con tres variables

$$\begin{cases} \mathbf{x + 3y + z = 6} \\ \mathbf{3x - y + 2z = 6} \\ \mathbf{x - y + z = 2} \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \mathbf{6} \\ 3 & -1 & 2 & \mathbf{6} \\ 1 & -1 & 1 & \mathbf{2} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{c} -3F1 + F2 \\ -1F1 + F3 \end{array} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \mathbf{6} \\ 0 & -10 & -1 & \mathbf{-12} \\ 0 & -4 & 0 & \mathbf{-4} \end{array}\right| \Rightarrow -1/10\ F2$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & \mathbf{6} \\ 0 & 1 & 1/10 & \mathbf{6/5} \\ 0 & -4 & 0 & \mathbf{-4} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{c} -3F2 + F1 \\ \\ 4F2 + F3 \end{array} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7/10 & \mathbf{12/5} \\ 0 & 1 & 1/10 & \mathbf{6/5} \\ 0 & 0 & 2/5 & \mathbf{4/5} \end{array}\right| \Rightarrow 5/2\ F3$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7/10 & \mathbf{12/5} \\ 0 & 1 & 1/10 & \mathbf{6/5} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{2} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{c} -7/10F3 + F1 \\ \\ -1/10F3 + F2 \end{array} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{2} \end{array}\right|$$

ACTIVIDAD Nº 9

Método por gauss gaussiana

Realizar los siguientes sistemas y encontrar sus incógnitas

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{2x + 3y = 5} \\ \mathbf{4x - y = 3} \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{x + 2y = 6} \\ \mathbf{3x - 2y = 2} \end{array} \right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \mathbf{x + y + z = 6} \\ \mathbf{2x - y + 3z = 9} \\ \mathbf{x - 2y + z = 0} \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \mathbf{3x + 2y + z = 6} \\ \mathbf{5x - y + z = 5} \\ \mathbf{6x - 2y + 3z = 7} \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \mathbf{3x + 5y + z = 17} \\ \mathbf{x - y + z = 1} \\ \mathbf{2x - y + 3z = 5} \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} 3x + y = 12 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} x + y + 2z = 4 \\ x - y + 3z = 3 \\ 2x - y + 3z = 4 \end{array}\right.$$

DEBER Nº 9

Método por gauss gaussiana

Realizar los siguientes sistemas y encontrar sus incógnitas

$$\left|\begin{array}{l} x + 4y = 6 \\ 3x - y = 5 \end{array}\right.$$

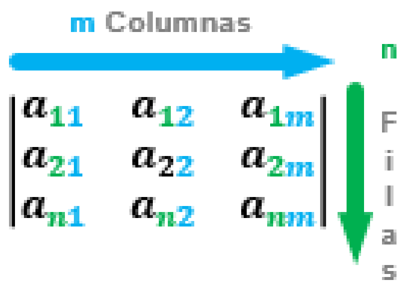
$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

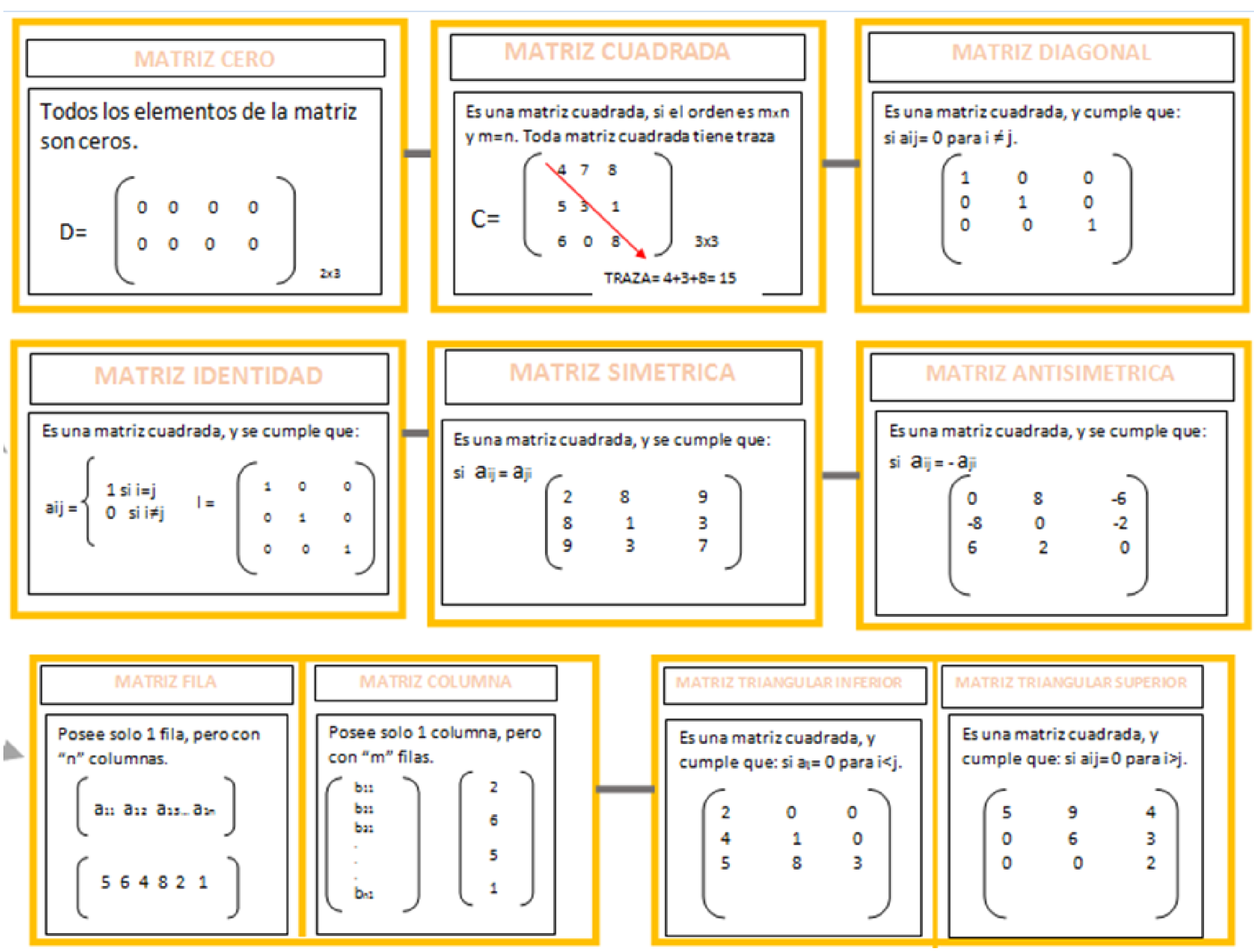
MATRICES

Concepto

Una MATRIZ está compuesta por un conjunto de valores ordenados por filas y columnas, donde las FILAS son horizontales y las COLUMNAS son verticales.



Tipos de matriz



OPERACIONES DE MATRICES

Suma y resta

Para efectuar estas operaciones las matrices deben tener el mismo número de fila y columnas, caso contrario no se podrá realizar. Cabe recalcar que su operación se realiza por posiciones.

Ejemplos

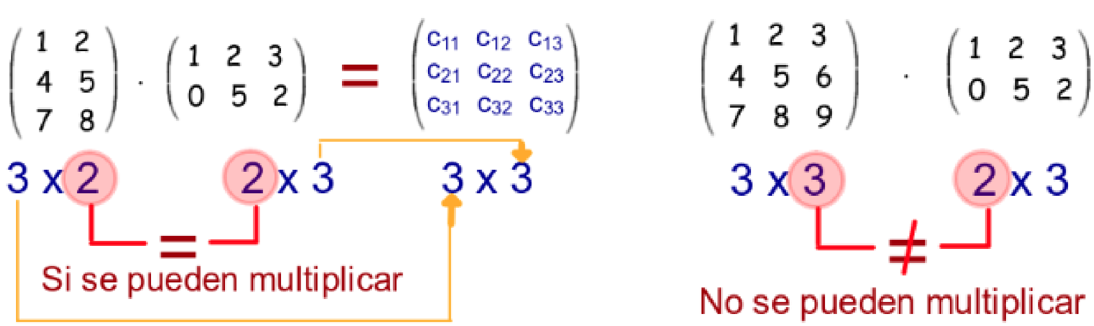
$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}2+1 & 0+0 & 1+1\\ 3+1 & 0+2 & 0+1\\ 5+1 & 1+1 & 1+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 1\\ 6 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$A-B=\begin{pmatrix}2-1 & 0-0 & 1-1\\ 3-1 & 0-2 & 0-1\\ 5-1 & 1-1 & 1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -2 & -1\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Multiplicación

Para efectuar debemos tener en cuenta lo siguiente:



Ejemplos

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{2\ 1} \\ \boxed{5\ 6} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}8\\2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}3\\9\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

$$AxB=\begin{pmatrix} 2.8+1.2 & 2.3+1.9 \\ 5.8+6.2 & 5.3+6.9 \end{pmatrix}$$

$$AxB=\begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 52 & 69 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \mathbf{0+6} & \mathbf{3+0} & \mathbf{0+6} \\ \mathbf{0-3} & \mathbf{0+0} & \mathbf{0-3} \\ \mathbf{0+3} & \mathbf{0+0} & \mathbf{0+3} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \mathbf{6} & \mathbf{3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Matriz transpuesta

Es cuando se cambia la posición de los valores de las filas por columnas

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriz inversa

Matriz 2x2 mediante la Adjunta

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det(A)=(7)(9)-(-2)(5)$$

$$\det(A)=63++10=73$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}=\frac{1}{73}\begin{bmatrix} 9 & -5 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{9}{73} & -\frac{5}{73} \\ \frac{2}{73} & \frac{7}{73} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{9}{73} & -\frac{5}{73} \\ \frac{2}{73} & \frac{7}{73} \end{bmatrix}$$

Matriz 3x3 mediante la Adjunta

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad |A| = 4 - 8 - (6-8) = -4 - (-2) = -4 + 2 = -2$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad Adj\,(A^t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}}{-2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7/2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Matriz 3x3 mediante Gauss Gaussiana

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 3/4 & 3/2 & -11/4 \\ -1/4 & -1/2 & 5/4 \end{pmatrix}$$

$$-5F_1 + F_2 \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} -40 & 0 & 0 & -20 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 0 & 15 & 30 & -55 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} F_1/-40 \\ F_2/20 \\ F_3/-4 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 3/2 & -11/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/2 & 5/4 \end{array}\right)$$

ACTIVIDAD Nº 10

Matrices

Realizar los siguientes ejercicios

$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$ $\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ $\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{vmatrix}$ $\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

$\boldsymbol{E} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$ $\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$ $\boldsymbol{G} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ $\boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

a) A + B **b) B – A** **c) C + D** **d) D – C**

e) E + F **f) F – E** **g) G – H** **h) H + G**

i) $3A + B$

j) $2C - 4D$

k) $2G - 3H$

l) $C * E$

m) $D * G$

n) $G * H$

o) $(E * B)^T$

p) G^T

q) DT

r) $(A - B)^T$

s) $(G + H)^T + G$

t) $(F * C)^T + H$

Dadas las matrices anteriores, realizar los siguientes ejercicios por los dos métodos

a) A^{-1}

b) B^{-1}

c) $\mathbf{G^{-1}}$

d) $\mathbf{H^{-1}}$

DEBER Nº 10

Matrices

Realizar los siguientes ejercicios

$A = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}$ $B = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ $C = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -6 \end{vmatrix}$ $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix}$

$E = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 0 \\ -3 & -3 \end{vmatrix}$ $F = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ $G = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ $H = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ -3 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

a) A + B **b) B – A** **c) C + D** **d) D – C**

e) E + F **f) F – E** **g) G – H** **h) H + G**

i) 3A + B **j) 2C – 4D** **k) 2G – 3H**

l) C * E **m) D * G** **n) G * H**

o) $(E * B)^T$ **p) G^T** **q) DT**

r) $(A - B)^T$ **s) $(G + H)^T + G$** **t) $(F * C)^T + H$**

Dadas las matrices anteriores, realizar los siguientes ejercicios por los dos métodos

A^{-1}

b) G^{-1}

c) $(G* H)^{-1}$

ECUACIÓN DE UNA RECTA PARALELA Y PERPENDICULAR

Recta paralela

Las rectas paralelas son dos o más rectas en un plano que nunca se intersectan.

Pendiente de una ecuación paralela

$$m_1 = m_2$$

Ejemplos

Determinar la ecuación

y= 2x + 3 $\Rightarrow$ A (1 , 3)

1) $m_1 = m_2$

$y = mx + b$

$m_1 = 2$

$m_2 = 2$

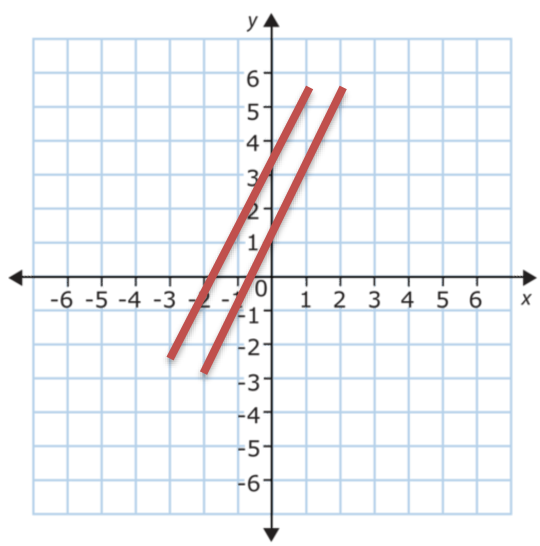
2) Punto (1, 3)

$y = m_2\, x + b$

$3 = 2\,(1) + b$

$3 = 2 + b$

$b = 3 - 2 = 1$



3) $y = m_2 x + b \Rightarrow y = 2x + 1$

1 EC.

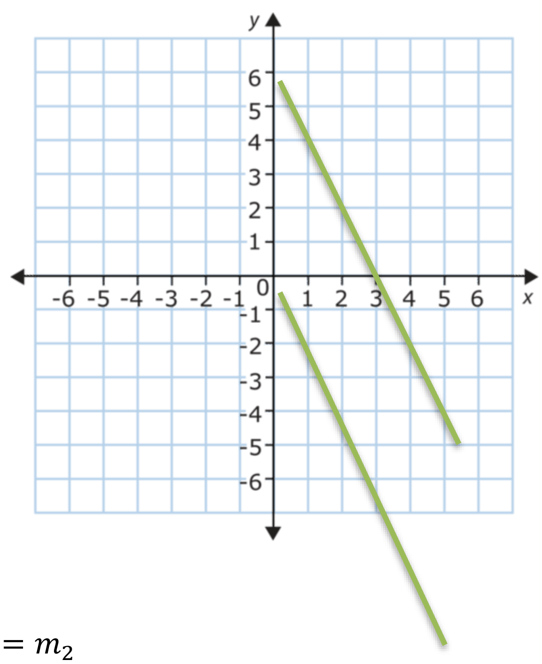
x	**y**
0	3
1	5

2 EC.

x	**y**
0	1
1	**3**

Determinar la ecuación

(2 , 3) (1, 5) $\Rightarrow$ A (2 , –1)



x y

1) $\boldsymbol{m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

$\boldsymbol{m_1 = \frac{5-3}{1-2}}$

$\boldsymbol{m_1 = \frac{2}{-1}}$

$m_1 = -2$

3) Punto **(2, –1)**

$y = m_2 x + b$

$-\mathbf{1} = -2\,(2) + b$

$-\mathbf{1} = -\mathbf{4} + b$

$b = -\mathbf{1} + \mathbf{4} = 3$

2) $m_1 = -2$

$m_2 = -2$

4) $y = m_2 x + b$

$y = -2x + 3$

$m_1 = m_2$

1 PT.

x	**y**
2	3
1	5

2 EC.

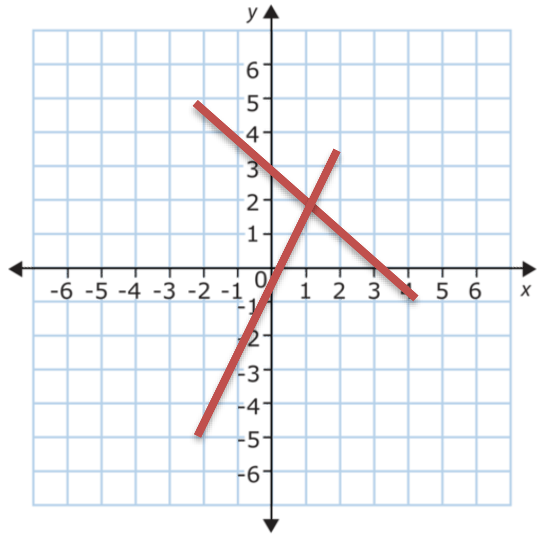
x	**y**
2	1
0	**3**

Recta perpendicular

Las rectas perpendiculares son dos o más rectas que se intersectan formando un ángulo de 90 grados

Pendiente de una ecuación perpendicular

$$\boxed{m_1 = -\frac{1}{m_2}}$$



Ejemplos

Determinar la ecuación

y= 2x + 3 $\Rightarrow$ A (1 , 3)

1) $m_1 = -\frac{1}{m_2}$ 2) Punto (1, 3)

y= mx +b y= m_2 x +b

m_1 = 2 3= **–1/2** (1) + b

m_2 = – **1**/2 3= **–1/2** + b

b= 3 **+ 1/2** = 7/2

3) y= m_2 x +b $\Rightarrow$

y = **–1/2** x + 3.5

1 EC.

x	**y**
0	3
1	5

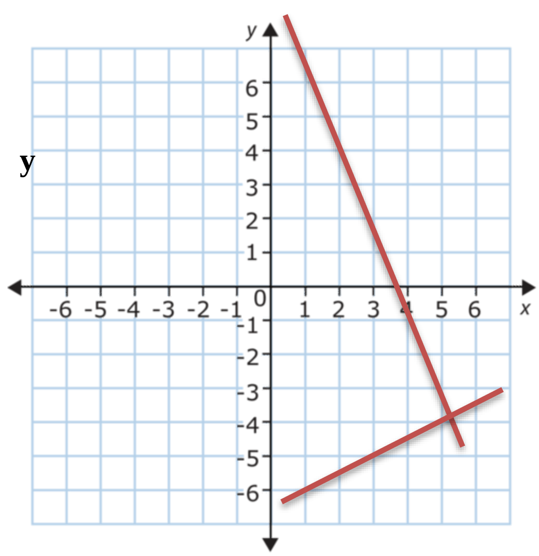
2 EC.

x	**y**
0	3.5
1	**3**

Determinar la ecuación

(2 , 3) (1, 5) $\Rightarrow$ A (2 , –1)

x y



1) $\boldsymbol{m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$ **3)** Punto **(2, –1)**

$\boldsymbol{m_1 = \frac{5-3}{1-2}}$ y= m_2 x +b

$\boldsymbol{m_1 = \frac{2}{-1}}$ **– 1** = **1/2** (2) + b

m_1 = – 2 **– 1**= **1** + b

b= **– 1 - 1** = 2

$m_1 = -\mathbf{1}/m_2$

2) $m_1 = -2$ 4) $y = m_2 x + b$

$m_2 = \mathbf{1}/2$ $y = 1/2\,x - 2$

1 PT.

x	**y**
2	3
1	5

2 EC.

x	**y**
2	1
0	**- 2**

ACTIVIDAD Nº 11

Ecuación de una recta paralela y perpendicular

1.- Encontrar la ecuación de una recta paralela y grafique

a) y= 3x – 1 ⇒ B (1, 5)

b) y= 5x – 2 ⇒ B (0, 2)

c) $y= -x + 2 \Rightarrow B\ (1, -2)$

2.- Encontrar la ecuación de una recta perpendicular y grafique

a) $y= x - 1 \Rightarrow B\ (3, 4)$

b) $y= 2x - 5 \Rightarrow B\ (4, 1)$

c) $y = -x + 1 \Rightarrow B(0, -3)$

DEBER Nº 11

Ecuación de una recta paralela y perpendicular

Encontrar la ecuación paralela y perpendicular y grafique

a) $y = x + 2 \rightarrow A(2, 3)$

b) $y = 3x - 2 \rightarrow B(1, 4)$

c) $y = 4x + 1 \rightarrow A(0, 3)$

d) $y = \frac{1}{2}x + 1 \rightarrow A(2, 1)$

ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA

Concepto

Se deduce la ecuación de la circunferencia, obteniendo la ecuación centro radio, conocida también como la forma canónica o estándar. Con estas dos informaciones se puede conseguir la ecuación de la circunferencia (MatematicaTuya.com, 2021)

Fórmulas

CUANDO EL CENTRO SE ENCUENTRA EN EL ORIGEN

$$x^2 + y^2 = r^2$$

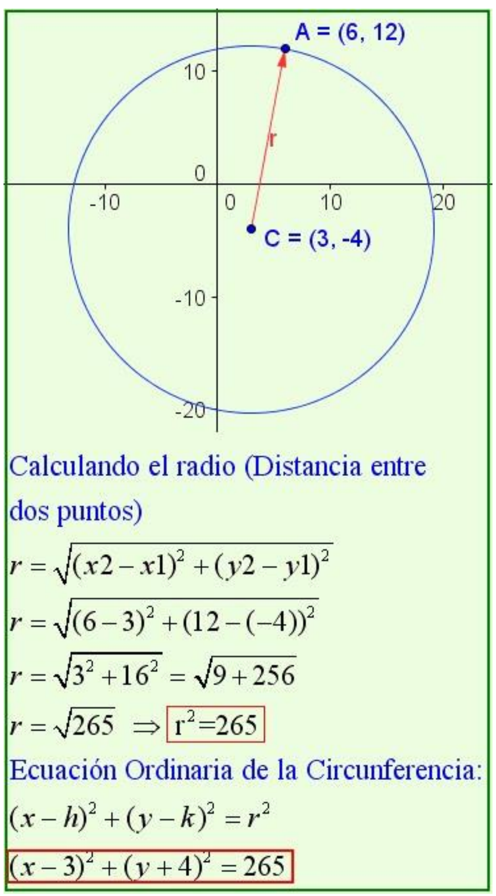
CUANDO EL CENTRO SE ENCUENTRA EN UN PUNTO CUALQUIERA

ECUACIÓN $\rightarrow$ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

RADIO $\rightarrow$ $r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

El punto O pertenece de la circunferencia al par ordenado de (h,k) donde significa el centro.

Ejemplo



Encontrar la ecuación de la circunferencia donde o (2, 6) y su radio es 4 cm

$$(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 4^2$$

$$x^2 - 2(2x) + 2^2 + y^2 - 2(6y) + 6^2 = 4^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 12y + 36 = 16$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 12y + 4 + 36 - 16 = 0$$

$$\mathbf{x^2 + y^2 - 4x - 12y + 24 = 0}$$

ACTIVIDAD Nº 12

Ecuación de una circunferencia

*** Encontrar la ecuación de la circunferencia**

a) O (1, 3); r= 2cm b) O (2, - 3); r= 4cm c) O (- 4, 2); r= 3cm

d) O (5, 2); r= 2cm e) O (0, 0); r= 3cm f) O (- 4, 0); r= 5cm

*** Encontrar el radio de la circunferencia y grafique**

a) O (2, 3); A (1, 2) b) O (2, 2); B (3, 1)

c) O (- 1, 4); C (5, 1)

d) O (1, 0); D (- 3, - 1)

<u>DEBER Nº 12</u>

Ecuación de una circunferencia

Encontrar la ecuación de la circunferencia

a) O (2, 3) ; r= 2cm

b) O (1,5) ; r= 3cm

c) O (2, - 4) ; r= 4cm

d) O (0, 3) ; r= 4cm

e) O (6,5) ; r= 2cm

f) O (1, - 5) ; r= 3cm

Encontrar el radio de la circunferencia y grafique

a) O (2, 3) ; A (5, 2) **b) O (5, 3) ; B (1, 3)** **c) O (0, 3) ; C (5, 0)**
d) O (2, 4) ; A (1, 2) **e) O (2, 3) ; B (1, 4)** **f) O (5, 3) ; C (5, 1)**

SISTEMA DE INECUACIÓN LINEAL

Concepto

Un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas es un conjunto de dos o más de estas inecuaciones. El par **(s_1, s_2)** es solución del sistema si satisface simultáneamente todas las inecuaciones a la región solución, si existe, se le llama también región factible. Si es vacía, el **sistema es incompatible** (Alvarez, 2021)

Resolución

La resolución de un sistema de inecuaciones se realiza encontrando la región del plano intersección de los semiplanos que son solución de cada una de las inecuaciones que forman el sistema: (Alvarez, 2021)

Consideremos el sistema formado por dos inecuaciones lineales con dos incógnitas. Representamos, en el plano cartesiano, los semiplanos solución de ambas inecuaciones.

Las soluciones del sistema son las coordenadas de los puntos que pertenecen a la vez a los dos semiplanos solución.

Ejemplo

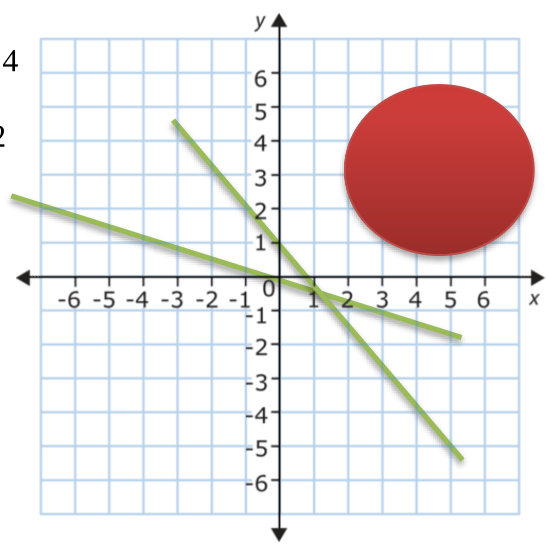
$$\left|\begin{array}{l} \boldsymbol{x+3y>6} \\ \boldsymbol{2x+y>4} \end{array}\right.$$

1era. Ecuación

X = 0	**Y = 0**
0 + 3y = 6	x + 0 = 6
3y = 6	x = 6
y = 6 / 3	
y = 2	
(0 , 2)	(6, 0)

2da. Ecuación

X = 0	**Y = 0**
0 +y = 4	2x + 0 = 4
y = 4	2x = 4
	x = 4 / 2
	x = 2
(0, 4)	(2, 0)



Comprobación

1er. Ecuación

(1, 1)

$$1+3(1)>6$$
$$1+3>6$$
$$4>6$$

FALSO

2da. Ecuación

(- 3, 5)

$$2(-3)+5>4$$
$$-6+5>4$$
$$-1>4$$

FALSO

SI ES FALSO se sombreará lo contrario del punto

ACTIVIDAD Nº 13

Sistema de inecuación lineal

Realizar el siguiente sistema de inecuación

$$\left|\begin{array}{l} 3x + 4y > 12 \\ x + y > 4 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} 5x + 4y > 20 \\ x + 3y > 6 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 2x + 5y > 10 \\ 2x - 3y < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x + 4y > 8 \\ x - y > 5 \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{l} 2x + 7y > 14 \\ 5x - y < 10 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} 3x + 5y < 15 \\ 2x - 5y < 10 \end{array}\right.$$

DEBER Nº 13

Sistema de inecuación lineal

*** Realizar el siguiente sistema de inecuación**

$$\begin{vmatrix} 5x + y > 10 \\ x + 4y > 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2x + 5y > 10 \\ 4x + 3y > 12 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x + 5y > 5 \end{vmatrix}$$

$$\left| \; x - 3y < 6 \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} 8x + y > 4 \\ x - 2y > 4 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x + 7y > 14 \\ x - y < 10 \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} 3x + y < 15 \\ x - 5y < 10 \end{array} \right.$$

LÍMITES

Si *f(x)* es una función común (polinómica, racional, radical, exponencial, logarítmica, etc.) y está definida en el punto a, entonces se puede expresar como: (Marta, 2018)

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Límite cuando x tiende a infinito

Para calcular el límite de una función cuando **x** → ∞ se sustituyen las **x por** ∞**.**

FUNCIONES POLINÓMICAS EN EL INFINITO	
INVERSA DE UN POLINOMIO $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{P(x)} = 0$	**LÍMITE CUANDO x TIENE A MENOS INFINITO** $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f(-x)$
LÍMITE DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL **Si a > 0** $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$ $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ **Si 0 < a < 1** $\lim_{x \to \infty} a^x = 0$ $\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty$	**LÍMITE DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA** **Si a > 0** $\lim_{x \to \infty} \log_a x = \infty$ $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$ **Si 0 < a < 1** $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = \infty$ $\lim_{x \to \infty} \log_a x = -\infty$

Operaciones con infinito

En el siguiente listado se mostrará un recurso para resolver límites. Debemos tener en claro que **infinito no es un número** y no podemos distinguir entre + ∞ y - ∞. La regla de los signos y que $\mathbf{a^{-n} = 1/a^n}$**.**

Suma con infinito →	∞ ± **k** = ∞ ;	∞ + ∞ = ∞ ;	∞ - ∞ = **Ind**
Productos con infinito →	∞ * (±k) = ±∞ **Si k ≠ 0** ;	∞ * ∞ = ∞ ;	**0** * ∞ = **Ind**

Cocientes con infinito y cero→	**0/k = 0 ; k/ ∞ = 0 ; 0/∞ = 0 ; 0/0 = Ind** **k/0 = ∞ ; ∞/k = ∞ ; ∞/ 0 = ∞ ; ∞/∞ = Ind**
Potencias con infinito y cero→	**$k^0 = 1$; ∞^0 = Ind ; 0^0 = Ind** **$k^\infty \rightarrow$ ∞ cuando k>0 y 0 cuando k<0**

Propiedades de los límites

Límite de una constante

$$\lim_{x\to a} k = k$$

Límite de una suma

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

Límite de un producto

$$\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Límite de un cociente

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad si \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

Límite de una potencia

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right] = \lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad si \quad f(x)>0$$

Límite de una función

$$\lim_{x\to a} g[f(x)] = g \lim_{x\to a} f(x)$$

'g puede ser una raíz, un log, sen ,cos, tg, etc.'

Límite de una raíz

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

Si n es impar

Si n es par $f(x) \geq 0$

Límite de un logaritmo

$$\lim_{x\to a}[\log_a f(x)] = \log_a\left[\lim_{x\to a} f(x)\right] \quad \text{Si } a>0 \text{ y } f(x)>0$$

Cálculo del límite en un punto

Si *f(x)* es una función común (polinómica, racional, radical, exponencial, logarítmica, etc.) y está definida en el punto a, entonces se puede expresar como: (Marta, 2018)

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Es decir, para calcular el límite de la función **f(x)** *se sustituye el valor al que tiende* ***x → a*** *, como se observa en las siguientes expresiones:* (Marta, 2018)

$$\lim_{x\to 1}(-x^2 - 5x + 6) = -1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2}{x^2 - 5x + 2} = \frac{3^2 - 2}{3^2 - 5 \cdot 3 + 2} = -\frac{7}{4}$$

CÁLCULO DEL LÍMITE EN UNA FUNCIÓN DEFINIDA A TROZOS

Se realiza mediante límites laterales en los puntos de unión de los diferentes trozos.

Σ Si coinciden, este es el valor del límite

Σ Si no coinciden, el límite no existe

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si & x < -1 \\ x^2 & si & -1 \leq x < 1 \\ 2 & si & x \geq 1 \end{cases}$$

En $x = -1$, los límites laterales son:

Σ Por la izquierda: $\lim_{x \to -1^-} 1 = 1$

Σ Por la derecha: $\lim_{x \to -1^+} x^2 = 1$

Como en ambos casos coinciden, el límite existe y vale 1.

En $x = 1$, los límites laterales son:

Σ Por la izquierda: $\lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$

Σ Por la derecha: $\lim_{x \to 1^+} 2 = 2$

Como no coinciden los límites laterales no tiene límite en $x = 1$.

Ejercicios de límites de funciones

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x + \tan x}{\operatorname{sen} x}$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\tan x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}+\frac{\tan x}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}+\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{\operatorname{sen} x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}+\frac{1}{\cos x}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\frac{x+\tan x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} + \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1}+\frac{1}{\cos 0} = 1+\frac{1}{1} = 2 \qquad \{\mathrm{TL10}\}.$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16} = \lim_{x\to -2}\frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{\cancel{(x+2)}(x-2)(x^2+4)} = \lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+4}{(x-2)(x^2+4)},$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16} = \frac{(-2)^2-2(-2)+4}{(-2-2)((-2)^2+4)} = \frac{4+4+4}{-4(8)} = -\frac{12}{32};$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)^2-3x^2+3}{x^3-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1-3x^2+3}{x^3-5}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}-\frac{x^2}{x^4}+\frac{4}{x^4}}{\frac{x^3}{x^4}-\frac{5}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^4}}{\frac{1}{x}-\frac{5}{x^4}}=$$

$$=\frac{1-\frac{1}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{5}{\infty}}=\frac{1-0+0}{0-0}=\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x^2-5}{2x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)}{2x^3}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{2}=\frac{2+0+0}{2}=1$$

<u>ACTIVIDAD Nº 14</u>

Límite

*** Calcular los siguientes límites por sustitución directa**

$\boldsymbol{a)}\ \lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) =$

$\boldsymbol{b)}\ \lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x+1} =$

$\boldsymbol{c)}\ \lim_{x \to 2} \frac{4x-5}{x^2+3x+6} =$

$\boldsymbol{d)}\ \lim_{x \to 1} \sqrt[5]{x^2 - x} + (x^2 + 4)^2 =$

$\boldsymbol{e)}\ \lim_{x \to 8} \frac{x-\sqrt[3]{x}}{4x-10} =$

*** Calcular los siguientes límites por indeterminación (0/0)**

$\boldsymbol{a)}\ \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} =$

$\boldsymbol{b)}\ \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2} =$

$\boldsymbol{c)}\ \lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x^2-x-6} =$

$$d)\ \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} =$$

$$e)\ \lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} =$$

$$f)\ \lim_{x \to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2+x-6} =$$

$$g)\ \lim_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x-3} =$$

$$h)\ \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{a^2+1}}{x-a} =$$

$$i)\ \lim_{x \to 2} \frac{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{8}}{x-2} =$$

*** Calcular los siguientes límites de forma indeterminada (0/0) en una fracción con radicales**

$$a)\ \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} =$$

$$b)\ \lim_{x \to -4} \frac{x+4}{\sqrt{x+4}} =$$

$$c)\ \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} =$$

$$d)\ \lim_{x \to 7} \frac{x-7}{\sqrt{x-4}-\sqrt{3}} =$$

*** Calcular los siguientes límites con infinitos**

Sea c un número real
1. $\infty + \infty = \infty$, $c + \infty = \infty$, $c - \infty = -\infty$,
2. Si $c > 0$ entonces $c \cdot \infty = \infty$, $\frac{\infty}{c} = \infty$, $c \cdot (-\infty) = -\infty$, $\frac{-\infty}{c} = -\infty$,
3. Si $c < 0$ entonces $c \cdot \infty = -\infty$, $\frac{\infty}{c} = -\infty$, $c \cdot (-\infty) = \infty$, $\frac{-\infty}{c} = \infty$
4. $\frac{c}{\infty} = 0$
5. $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, INDETERMINACIONES

$$a)\ \lim_{x \to \infty} 6x + 3 =$$

$$b)\ \lim_{x \to \infty} x^2 - 100 =$$

$$c)\ \lim_{x \to \infty} (x^4 + 2)(x^2 - 5) =$$

$d)\ \lim\limits_{x \to \infty} \frac{4}{(x-5)^3} =$

$e)\ \lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{4-x} =$

*** Calcular los siguientes límites con la determinación (∞/∞)**

$a)\ \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-x}{x+10} =$

$b)\ \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3}{2+x^5} =$

$c)\ \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3+2x-6x^2}{8+4x-2x^2} =$

$d)\ \lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^3+x}{2x^3+3} =$

DEBER Nº 14

Límite

*** Calcular los siguientes límites por sustitución directa**

$a)\ \lim_{x \to 2} \left(3x^2 - x + 4 \right) =$

$b)\ \lim_{x \to 2} \frac{x^2-5}{x+2} =$

$c)\ \lim_{x \to 3} \frac{4x-2}{3x^2+x+6} =$

$d)\ \lim_{x \to 2} \sqrt[5]{x^2 - x} + \left(x^2 + 4\right)^2 =$

$e)\ \lim_{x \to 64} \frac{x-\sqrt[3]{x}}{4x-10} =$

*** Calcular los siguientes límites por indeterminación (0/0)**

$a)\ \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} =$

$b)\ \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2+3x+2} =$

$c)\ \lim_{a \to 3} \frac{a-9}{a^2-a-6} =$

$$d)\ \lim_{a \to 1} \frac{a^2-1}{a^2+3a+2} =$$

$$e)\ \lim_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x-3} =$$

$$f)\ \lim_{m \to 2} \frac{m^2+3m-10}{m^2+m-6} =$$

$$g)\ \lim_{x \to 4} \frac{x^3-64}{x-4} =$$

$$h)\ \lim_{a \to 1} \frac{\frac{1}{a^3}-\frac{1}{1}}{a-1} =$$

*** Calcular los siguientes límites con infinitos**

$$a)\ \lim_{x \to \infty} 2x+1 =$$

$$b)\ \lim_{x \to \infty} x^2-50 =$$

$\boldsymbol{c})\ \lim_{x \to \infty} (x^4 + 1)(x^2 - 3) =$

$\boldsymbol{d})\ \lim_{x \to \infty} \frac{1}{(x-2)^3} =$

$\boldsymbol{e})\ \lim_{x \to \infty} \sqrt{2 + x} =$

*** Calcular los siguientes límites con la determinación (∞/∞)**

$\boldsymbol{a})\ \lim_{x \to \infty} \frac{4x^3+1}{2x^3+x} =$

$\boldsymbol{b})\ \lim_{x \to \infty} \frac{x^2-1}{x^3+1} =$

$\boldsymbol{c})\ \lim_{x \to \infty} \frac{2x-6x^3}{8-2x^3} =$

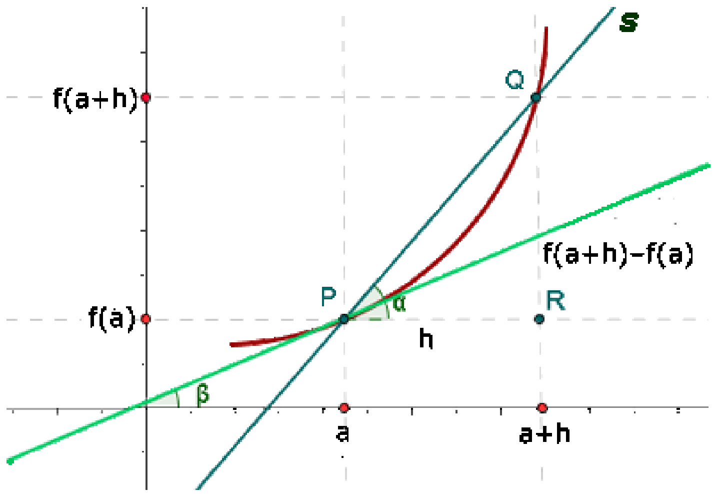
$\boldsymbol{d})\ \lim_{x \to \infty} \frac{2x^5+x}{x^5} =$

DERIVADAS

La derivada es el resultado de un límite y representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto. Pero vayamos por partes (Avila, 2021)

La definición de derivada es la siguiente:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



Ejemplo

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)^2-3\cdot 2^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3(4+4h+h^2)-12}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h^2+12h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(3h+12) = 12$$

2. Calcular la derivada de la función $f(x) = x^2 + 4x - 5$ en $x = 1$.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2+4(1+h)-5-\left(1^2+4\cdot 1-5\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2+4+4h-5}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2+6h}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}(h+6) = 6$$

Tasa de variación media

Se llama **tasa de variación media (TVM)** en intervalo $[a, a+h]$, representada por $\frac{\Delta y}{h}$ o $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, al **cociente entre la tasa de variación y la amplitud del intervalo** considerado sobre el eje de abscisas, h o Δx, esto es:

$$\mathbf{TVM}[a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ejemplo

1. Calcular la TVM de la función $f(x) = x^2 - x$ en el intervalo $[1, 4]$.

$$\begin{aligned}\mathbf{TVM}[1,4] &= \frac{f(4) - f(1)}{3} \\ &= \frac{12 - 0}{3} \\ &= 4\end{aligned}$$

2. El índice de la bolsa de Madrid pasó cierto año de 1350 a 1510. Hallar la tasa de variación media mensual.

$$\begin{aligned}\mathbf{TVM} &= \frac{1510 - 1350}{12} \\ &= \frac{160}{12} \\ &= 13.33\end{aligned}$$

Propiedades

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES			
Simple		Compuesta	
Función	Derivada	Función	Derivada
$y = k$	$y' = 0$		
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = f(x)^n$	$y' = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = \frac{-1}{x^2}$	$y = \frac{1}{f(x)}$	$y' = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$y' = \frac{f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{f(x)^{n-1}}}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$y = a^{f(x)}$	$y' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \cdot \ln a$

$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$
$y = senx$	$y' = \cos x$	$y = sen(f(x))$	$y' = f'(x) \cdot \cos(f(x))$
$y = \cos x$	$y' = -senx$	$y = \cos(f(x))$	$y' = -f'(x) \cdot sen(f(x))$
$y = tg\,x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x = \sec^2 x$	$y = tg(f(x))$	$y' = \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} = f'(x) \cdot (1 + tg^2(f(x))) = f'(x) \sec^2(f(x))$
$y = cotg\,x$	$y' = \frac{-1}{sen^2 x} = -(1 + cotg^2 x) = -cosec^2 x$	$y = cotg(f(x))$	$y' = \frac{-f'(x)}{sen^2(f(x))} = -f'(x) \cdot (1 + cotg^2(f(x))) = -f'(x) cosec^2(f(x))$
$y = \sec x$	$y' = \frac{senx}{\cos^2 x}$	$y = \sec(f(x))$	$y' = \frac{sen(f(x))}{\cos^2(f(x))} f'(x)$
$y = cosec\,x$	$y' = \frac{-\cos x}{sen^2 x}$	$y = cosec(f(x))$	$y' = \frac{-\cos(f(x))}{sen^2(f(x))} f'(x)$
$y = arcsen\,x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = arcsen(f(x))$	$y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$y = \arccos(f(x))$	$y' = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}$
$y = arctg\,x$	$y' = \frac{1}{1 + x^2}$	$y = arctg(f(x))$	$y' = \frac{f'(x)}{1 + f(x)^2}$

Ejemplo

Función producto

$$f_{(x)} = \underbrace{(5x^3 - 2x^2)}_{g_{(x)}} \underbrace{(6x^3)}_{h_{(x)}}$$

$$g'_{(x)} = 15x^2 - 4x \qquad h'_{(x)} = 18x^2$$

$$f'_{(x)} = (5x^3 - 2x^2)(18x^2) + (6x^3)(15x^2 - 4x)$$

$$f'_{(x)} = 90x^5 - 36x^4 + 90x^5 - 24x^4$$

$$f'_{(x)} = 180x^5 - 60x^4$$

Función racional (derivada de cociente)

Si $f_{(x)} = \dfrac{g_{(x)}}{h_{(x)}}$ ENTONCES $f'_{(x)} = \dfrac{h_{(x)}\cdot g'_{(x)} - g_{(x)}\cdot h'_{(x)}}{[h_{(x)}]^2}$

$$f_{(x)} = \frac{3x^2+5}{2x^3} \qquad g'_{(x)} = 6x \qquad h'_{(x)} = 6x^2$$

$$f'_{(x)} = \frac{(2x^3)(6x)-(3x^2+5)(6x^2)}{(2x^3)^2}$$

$$f'_{(x)} = \frac{12x^4-(18x^4+30x^2)}{4x^6}$$

$$f'_{(x)} = \frac{12x^4-18x^4-30x^2}{4x^6}$$

$$f'_{(x)} = \frac{-6x^4-30x^2}{4x^6}$$

$$f'_{(x)} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}x^2(-3x^2-15)}{\underset{2}{\cancel{4}}x^{\cancel{6}4}}$$

Función trigonométrica

Si $f_{(x)} = \operatorname{Sen} x$ ENTONCES

$$f'_{(x)} = \operatorname{Cos} x$$

$$f_{(x)} = \operatorname{Sen} x^3 \qquad\qquad f_{(x)} = \operatorname{Sen}^3 x$$

$$f'_{(x)} = \operatorname{Cos} x^3 \cdot 3x^2 \qquad\qquad f_{(x)} = (\operatorname{Sen} x)^3$$

$$f'_{(x)} = 3x^2 \operatorname{Cos} x^3 \qquad\qquad f'_{(x)} = 3(\operatorname{Sen} x)^2 \cdot \operatorname{Cos} x$$

$$f'_{(x)} = 3\operatorname{Sen}^2 x \cdot \operatorname{Cos} x$$

Función logarítmica

$$y = \operatorname{Log}_5 (3x^2-8)^4 \qquad a = 5$$

$$u = (3x^2-8)^4$$

$$u' = 24x(3x^2-8)^3$$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{Ln} a} \cdot \frac{u'}{u}$$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{Ln} 5} \cdot \frac{24x(3x^2-8)^3}{(3x^2-8)^4}$$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{Ln} 5} \cdot \frac{24x}{(3x^2-8)} = \frac{24x}{\operatorname{Ln} 5 \cdot (3x^2-8)}$$

REGLA DE LA CADENA

La regla de la cadena nos proporciona la derivada de la composición de funciones:

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$$

Procedimiento

1.- Se resuelve la potencia (bajándola como coeficiente)

2.- Se reduce la potencia sin afectar la base o coeficiente del ejercicio

3.- Se deriva la base o coeficiente del ejercicio

Ejemplo

$$\boldsymbol{f(x) = \sin(x^2)}$$
$$f'(x) = cos(x^2) * (2x)$$
$$f'(x) = 2x\ cos(x^2)$$

$$\boldsymbol{f(x) = (2x + 3)^3}$$
$$f'(x) = 3 * (2x + 3)^2 * (2 + 0)$$
$$f'(x) = 3 * (2x + 3)^2 * (2)$$
$$f'(x) = 6\ (2x + 3)^2$$

ACTIVIDAD Nº 15

Derivada

*** Calcular la derivada de las siguientes funciones con sus respectivos puntos**

$\boldsymbol{a}$) $\boldsymbol{f(x) = x^3\ en\ x = 4}$

b) $\boldsymbol{f(x) = 5x^2\ en\ x = -2}$

$c)\ f(x) = x^2 + 5x - 6\ en\ x = 1$ $d)\ f(x) = x^2 + 3x + 2\ en\ x = 2$

*** Calcular la derivada de las siguientes funciones**

$a)\ f(x) = 3x^4$ $b)\ f(x) = 2x^3 - x^2 + 10$ $c)\ f(x) = 5x^4 - sen(x) + ln\ 2$

$d)\ f(x) = (x + 3)(2x^2 - 5)$ $e)\ f(x) = (3x^2 + 1)(5x^3 - 2)$

$\boldsymbol{f)}\ \boldsymbol{f(x) = \frac{x+3}{x}}$

$\boldsymbol{g)}\ \boldsymbol{f(x) = \frac{2x+1}{5x^2-2}}$

$\boldsymbol{h)}\ \boldsymbol{f(x) = \log_2(5x+1)^2}$

$\boldsymbol{i)}\ \boldsymbol{f(x) = \log_6(3x^4-5)^3}$

$\boldsymbol{j)}\ \boldsymbol{f(x) = 4\,Cos(x^4) + 5x^2}$

$\boldsymbol{k)}\ \boldsymbol{f(x) = 5\,Sen^2\,(x) + \sqrt{2x}}$

*** Aplicar la regla de la cadena en las siguientes funciones**

$\boldsymbol{a)}\ f(x) = (5x-3)^4$

$\boldsymbol{b)}\ f(x) = 5\,(2x^3-3)^6$

$\boldsymbol{c)}\ f(x) = \sqrt{x^5+4x-3}$

$\boldsymbol{d)}\ f(x) = \sqrt[5]{3x^2+7}$

$\boldsymbol{e)}\ f(x) = \left(\frac{3x+1}{x-2}\right)^3$

$\boldsymbol{f)}\ f(x) = \frac{1}{(2x+3)^2}$

$\boldsymbol{g)}\ f(x) = \sqrt[3]{x^4-3x^3+2}$

$\boldsymbol{h)}\ f(x) = \left[(3x+1)^5+2\right]^3$

*** Derivar las siguientes funciones**

$a)\ y = 2\ ln\ \frac{1+x^2}{1+x^3}$ $b)\ y = Sen^3(2x+1)\ Cos(2-3x)$

DEBER Nº 15

Derivada

*** Calcular la derivada de las siguientes funciones con sus respectivos puntos**

$a)\ f(x) = x^2 \ en\ x = -1$

b) $f(x) = 4x^3 \ en\ x = 2$

$c)\ f(x) = x^2 + x - 20\ en\ x = 2$

$d)\ f(x) = x^2 + 4x + 3\ en\ x = -1$

*** Calcular la derivada de las siguientes funciones**

$a)\ f(x) = 5x^3$

$b)\ f(x) = 3x^2 - 2x^4 + 2$

$c)\ f(x) = 4x^3 - cos(x) + 2^x$

$d)\ f(x) = (3x - 1)(5x^2 + 2)$

$e)\ f(x) = (x^2 + 3)(2x^4 - 1)$

$\boldsymbol{f}$) $f(x) = \frac{3x-2}{3x}$

$\boldsymbol{g}$) $f(x) = \frac{5x+2}{3x^2-1}$

$\boldsymbol{h}$) $f(x) = \log_3(2x-3)^3$

$\boldsymbol{i}$) $f(x) = \log_5(5x^3+2)^4$

$\boldsymbol{j}$) $f(x) = 3\ Sen\ (x^3) + 4x^3$

$\boldsymbol{k}$) $f(x) = 2\ Cos^{\,2}\ (3x) + \sqrt{5x}$

*** Aplicar la regla de la cadena en las siguientes funciones**

$\boldsymbol{a)}\ \boldsymbol{f(x) = (2x+1)^5}$

$\boldsymbol{b)}\ \boldsymbol{f(x) = 3\,(4x^2-5)^5}$

$\boldsymbol{c)}\ \boldsymbol{f(x) = \sqrt{3x^2+5x+1}}$

$\boldsymbol{d)}\ \boldsymbol{f(x) = \sqrt[4]{2x^3-3}}$

$\boldsymbol{e)}\boldsymbol{f(x) = \left(\frac{4x+1}{3x-2}\right)^3}$

$\boldsymbol{f)}\ \boldsymbol{f(x) = \frac{1}{(4x-1)^2}}$

$\boldsymbol{g)f(x) = \sqrt[3]{2x^4 - x^3 + 1}}$ $\boldsymbol{h)\ f(x) = [(2x+1)^4 - 3]^3}$

*** Derivar las siguientes funciones**

$\boldsymbol{a)\ y = \sqrt{sen(5 - 3x^3)}}$ $\boldsymbol{b)\ y = \sqrt{\frac{cos(3x+1)}{2x+3}}}$

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Concepto

La **estadística descriptiva** es la rama de la estadística que recolecta, analiza y caracteriza un conjunto de datos (peso de la población, beneficios diarios de una empresa, temperatura mensual,…) con el objetivo de **describir** las características y comportamientos de este conjunto mediante **medidas de resumen, tablas o gráficos** (Serra, 2014)

Variables estadísticas

Las **variables estadísticas** se pueden clasificar por diferentes criterios. Según su medición existen dos tipos de variables: (Serra, 2014)

Cualitativa (o categórica): son las variables que pueden tomar como valores cualidades o categorías.

Ejemplos:

Sexo (hombre, mujer)

Salud (buena, regular, mala)

Cuantitativas (o numérica): variables que toman valores numéricos.

Ejemplos:

Número de casas (1, 2,). Discreta.

Edad (12,5; 24,3; 35;). Continua.

Tabla de frecuencias

Se trata de la recolección de datos como una información numérica necesaria para ayudar a tomar una decisión como más bases en una situación particular.

Los datos pueden clasificarse en:

Datos discretos

Son respuestas numéricas que surgen de un proceso de conteo

Datos continuos

Son respuestas numéricas que surgen de un proceso de medición.

Frecuencia. - La frecuencia es una medida que sirve para comparar la aparición de un elemento Xi en un conjunto de elementos (X1, X2,, XN)

Frecuencia absoluta. - La frecuencia absoluta (ni) de un valor Xi es el número de veces que el valor está en el conjunto (X1, X2…, XN).

Frecuencia absoluta acumulada. - La frecuencia absoluta acumulada(Ni) de un valor Xi del conjunto (X1, X2…, XN) es la suma de las frecuencias absolutas de los valores menores o iguales a Xi, es decir: suma de las frecuencias Ni = n1 + n2 + n3+…..+ ni

Frecuencia relativa. - La frecuencia relativa (fi) de un valor Xi es la proporción de valores iguales a Xi en el conjunto de datos (X1, X2,…, XN). Es decir, la frecuencia relativa es la frecuencia absoluta dividida por el número total de elementos N:

$$f_i = \frac{n_i}{N}$$

Frecuencia relativa acumulada. - Definimos la frecuencia relativa acumulada (Fi) de un valor Xi como la proporción de valores iguales o menores a Xi en el conjunto de datos (X1, X2,…, XN).

Media, mediana y moda

X_i	Frecuencia absoluta (n_i)	Frecuencia absoluta acumulada (N_i)	Frecuencia relativa (fi = ni/N)	Frecuencia relativa acumulada (Fi=Ni/N)
1	7	7	0,06	0,06
2	19	26	0,15	0,21
3	25	51	0,20	0,41
4	12	63	0,10	0,50
5	23	86	0,18	0,69
6	15	101	0,12	0,81
7	8	109	0,06	0,87
8	16	125	0,13	1,00
Total	**125**	**125**	**1**	**1**

Construcción de la tabla de frecuencias

1. En la primera columna se ordenan de menor a mayor los diferentes valores que tiene la variable en el conjunto de datos.

2. En las siguientes columnas (segunda y tercera) se ponen las frecuencias absolutas y las frecuencias absolutas acumuladas.

3. Las columnas cuarta y quinta contienen la las frecuencias relativas y las frecuencias relativas acumuladas.

4. Adicionalmente (opcional) se pueden incluir dos columnas (sexta y séptima), representando la frecuencia relativa y la frecuencia relativa acumulada como tanto por cien. Estos porcentajes se obtienen multiplicando las dos frecuencias por cien (EDCVINFORMATICA, 2021)

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Media

También llamada **promedio** o **media aritmética** de un conjunto de datos ($X_1, X_2, \ldots, X_N$) al valor característico de una serie de datos resultado de la suma de todas las observaciones dividido por el número total de datos (Serra, 2014)

$$\boxed{Media(X) = \overline{x} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}}$$

Valores discretos y continuos → $\overline{x} = \frac{\sum x_i * f}{n}$

Mediana

La **mediana** Me(X) es el elemento de un conjunto de datos ordenados (X_1, X_2…, XN) que **deja a izquierda y derecha la mitad de valores**. La mediana solo se podrá calcular si la variable es cuantitativa (Serra, 2014)

* **Valores discretos**

Variables impar ⇒ Se escoge la medida central

Variables par ⇒ Se escoge las dos medidas centrales ⇒ $Me = \frac{x_1+x_2}{2}$

* **Valores continuos** → $Me = L_{inf} + \left(\frac{\frac{n}{2}-F_{i-1}}{f_i}\right) * a$

$L_{(inf)}$ → Límite inferior de la clase mediana

F_{i-1} → Frecuencia absoluta acumulada de la clase anterior al intervalo mediana

f_i → Frecuencia absoluta de la clase

a → Amplitud del intervalo de clase

Moda

La **moda Mo(X)** es el valor más repetido del conjunto de datos, es decir, el valor cuya frecuencia relativa es mayor. En un conjunto puede haber más de una moda (Serra, 2014)

* **Valores discretos** → Mo = Valor que más se repite en un conjunto de datos

*** Valores continuos** $\rightarrow Mo = L_{inf} + \frac{f_i - f_{i-1}}{(f_i - f_{i-1}) + (f_i - f_{i+1})}$

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Parámetros estadísticos que indican como se alejan los datos respecto de la media aritmética. Sirven como indicador de la variabilidad de los datos. Las medidas de dispersión más utilizadas son el rango, la desviación estándar y la varianza (EcuRed, 2021)

Rango

Indica la dispersión entre los valores extremos de una variable. se calcula como la diferencia entre el mayor y el menor valor de la variable. Se denota como **R.**

Para datos ordenados se calcula como: (EcuRed, 2021)

$$\boldsymbol{R = X_{max} - X_{min}}$$

Dónde: x(max): Es el mayor valor de la variable. x(min): Es el menor valor de la variable.

Desviación media

Es la media aritmética de los valores absolutos de las diferencias de cada dato respecto a la media.

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n} \quad x_i = Variable \;\; ; \;\; \bar{x} = media\ aritmética \;\; ; \;\; n = total\ de\ datos$$

Varianza

Es otro parámetro utilizado para medir la dispersión de los valores de una variable respecto a la media. Corresponde a la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto a la media. Su expresión matemática es:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Desviación estándar

La desviación estándar mide el grado de dispersión de los datos con respecto a la media, se denota como s para una muestra o como σ para la población. Se define como la raíz cuadrada de la varianza según la expresión

$$\sigma = \sqrt{varianza}$$

Medidas de posición

Las **medidas de posición** dividen un conjunto de datos en grupos con el mismo número de individuos. Para calcular las **medidas de posición** es necesario que los **datos** estén ordenados de **menor a mayor** (Superprof, 2021)

Cuartiles

Los **cuartiles** son los **tres valores** de la variable que **dividen a un** conjunto de **datos ordenados** en **cuatro partes iguales.**

Q_1, Q_2 y Q_3 determinan los valores correspondientes al **25%, al 50% y al 75%** de los **datos.**

Q_2 coincide con la **mediana**. (Superprof, 2021)

$$\boldsymbol{Q_k = L_i + \frac{\frac{k * N}{4} - F_{i-1}}{f_i} * a_i \quad \rightarrow k = 1, 2, 3}$$

Dónde: L_i →es el límite inferior de la clase donde se encuentra la mediana

N →es la suma de las frecuencias absolutas

F_{i-1} → es la frecuencia acumulada anterior a la clase mediana

a_i → amplitud de la clase

Deciles

Los **deciles** son los **nueve valores** que **dividen** la serie de **datos** en **diez partes iguales.** Los **deciles** dan los valores correspondientes al **10%, al 20%…y al 90%** de los datos.

D_5 coincide con la **mediana** (Superprof, 2021)

$$D_k = L_i + \frac{\frac{k * N}{10} - F_{i-1}}{f_i} * a_i \quad \rightarrow k = 1, 2, \ldots\ldots, 9$$

Percentiles

Los **percentiles** son los **noventa y nueve valores** que **dividen** la serie de **datos** en **cien partes iguales.** Los **percentiles** dan los valores correspondientes al **1%, al 2%....y al 99%** de los datos. (Superprof, 2021)

P_{50} coincide con la **mediana.**

$$P_k = L_i + \frac{\frac{k * N}{100} - F_{i-1}}{f_i} * a_i \quad \rightarrow k = 1, 2, \ldots\ldots, 99$$

Diagrama tallo y hoja

El **diagrama de tallo y hojas** (Stem-and-Leaf Diagram) es un semigráfico que permite presentar la distribución de una variable cuantitativa. Consiste en separar cada dato en el último dígito (que se denomina **hoja**) y las cifras delanteras restantes (que forman el **tallo** (Serra, 2014)

Es especialmente útil para conjuntos de datos de tamaño medio (**entre 20 y 50 elementos**) y que sus datos no se agrupan alrededor de un único tallo. Con él podemos hacernos la idea de qué distribución tienen los datos, la asimetría, etc. (Serra, 2014)

Tallo	Hoja
4	4 5 9
5	0 2 3 3 4 4 6 7 7 7 8
6	1 2 2 3 4 7 8 9
7	0 1 1 2 3 4 4 5 6 6 8 9
8	0 1 3 5

Histograma

También llamado **diagrama de barras** es un gráfico que se utiliza para representar datos de variables cualitativas o discretas. Está formado por **barras** rectangulares cuya altura es proporcional a la frecuencia de cada uno de los valores de la variable.

Las principales características del diagrama de barras son:

En el **eje de abcisas** se colocan las cualidades de la variable, si la variable es cualitativa, o los valores de dicha variable, si es discreta.

En el **eje de ordenadas** se colocan las barras proporcionales a la frecuencia relativa o absoluta del dato.

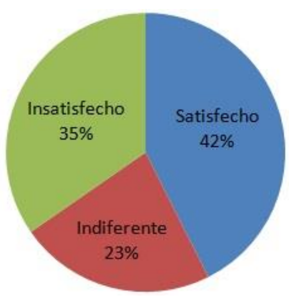
Las barras pueden ser **horizontales o verticales**, según donde se reflejen los valores de la variable.

Todas las barras deben tener el **mismo ancho** y no deben superponerse las unas con las otras.

Diagrama circular

El **diagrama circular** (también llamado **diagrama de sectores** o **diagrama de pastel**) sirve para representar variables cualitativas o discretas. Se utiliza para representar la proporción de elementos de cada uno de los valores de la variable.

Consiste en partir el círculo en porciones proporcionales a la frecuencia relativa. Entiéndase como porción la parte del círculo que representa a cada valor que toma la variable.



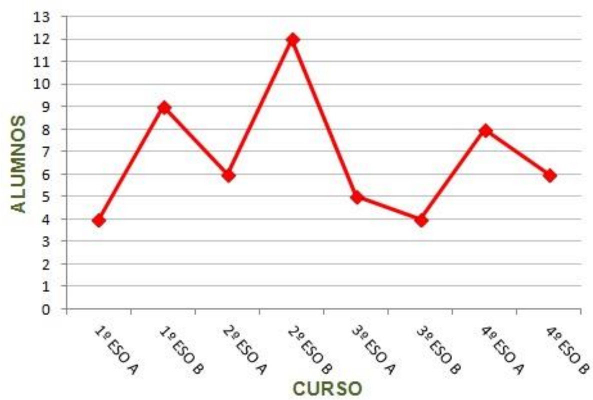
Se escoge los valores de los porcentajes

$$\theta = \frac{\% * 360º}{100\ \%}$$

Diagrama de dispersión

El polígono de frecuencias es un gráfico que permite la rápida visualización de las frecuencias de cada una de las categorías del estudio.

Normalmente se utiliza el polígono de frecuencias con frecuencias absolutas, pero también se utiliza con frecuencias relativas.



ACTIVIDAD Nº 16

Estadística descriptiva – datos discretos

Realizar los siguientes ejercicios armando la tabla de frecuencia

En una encuesta realizada por empresa de GASEOSAS S.A, querían saber cuál es la bebida más consumida en su país; en cual obtuvieron COCA COLA 83, SRITE 22, FIORAVANTI 15, FANTA 25, PEPSI 45 y GALLITO 10. Esto se realizó a 200personas

Hay 50 personas en una clase de matemáticas, en la cual se tomó un examen y obtuvieron las siguientes notas: 20 NOTAS DE 15, 5 NOTAS DE 16,17, 18 y 20, 10 NOTAS DE

En una empresa realizó una encuesta a sus 100 trabajadores para decidir las bebidas y de ellas escoger la mejor de ellas entre sus datos fueron 20 agua, 30 jugo de naranja, 40 gaseosa y 10 guitic.

En una encuesta realizada en un aula de clase para saber cuál profesor es el más estricto donde 20 decidieron Matemática, 8 Lenguaje, 1 EE. SS y CC. NN y 10 Dibujo Técnico.

Realizar con los ejercicios anteriores calcular, media, mediana y moda

Realizar con los ejercicios anteriores graficar el histograma

Realizar con los ejercicios anteriores graficar el diagrama circular

Realizar con los ejercicios anteriores graficar diagrama de dispersión

ACTIVIDAD Nº 17

Estadística descriptiva – datos continuos

Número de intervalos → regla de sturgues → $\boldsymbol{K = 1 + 3{,}322 - log\ (n)}$

amplitud de la clase → $\boldsymbol{A = \frac{R}{K}}$

Realizar los siguientes ejercicios armando la tabla de frecuencia

En un examen de terminación de la carrera de Medicina, las notas de 35 alumnos son: 0; 0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 6; 6; 6; 7; 7; 7; 8; 8; 8; 9; 10; 10.

Estos datos se encuentran del 0 al 10. Con los datos obtenidos, elaborar una tabla de frecuencias con 5 intervalos o clases.

Un grupo de deportistas decidieron participar en un maratón, donde el nutricionista sugirió que siga una dieta muy estricta. A continuación, viene el peso que deberá bajar los deportistas que se encuentra en kilogramos → 0.2 – 8.4 – 14.3 – 6.5 – 3.4 – 4.6 – 9.1 – 4.3 – 3.5 – 1.5 – 6.4 – 15.2 – 16.1 – 19.8 – 5.4 – 12.1 – 9.6 – 8.7 -12.1 – 3.2

En un centro comercial se registra el tiempo que tarda en hacer llegar sus compras a los clientes. Los tiempos registrados en días registrados son los siguientes:

2 – 7 – 10 – 16 – 19 – 22 – 6 – 25 – 5 – 20 – 13 – 32 – 13 – 29 – 18 – 20 – 13 – 6 – 12 – 35

En un parque de diversión, se consultó las edades de todas las personas que circulaban dentro de allí entre las 13:00h y 13:30h. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

15	73	1	65	16	3	42
36	42	3	61	19	36	47
30	45	29	73	69	34	23
22	21	33	27	55	58	17
4	17	48	25	36	11	4
54	70	51	3	34	26	10

Realizar con los ejercicios anteriores calcular, media, mediana y moda

Realizar con los ejercicios anteriores graficar el histograma

Realizar con los ejercicios anteriores graficar el diagrama circular

Realizar con los ejercicios anteriores graficar diagrama de dispersión

Realizar con los ejercicios anteriores

CUARTILES → Q_1, Q_2 y Q_3

DECILES → D_1, D_3, D_7, D_9

PERCENTILES → P_{10}, P_{34}, P_{53}, P_{88}

Bibliografía

(jueves de 1 de 2021). Obtenido de EcuRed: https://www.ecured.cu/Medidas_de_dispersi%C3%B3n#:~:text=Par%C3%A1metros%20estad%C3%ADsticos%20que%20indican%20como,desviaci%C3%B3n%20est%C3%A1ndar%20y%20la%20varianza.

Alvarez, D. G. (jueves de 1 de 2021). Obtenido de http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/inecuaciones_dga/inecuaciones/inecuacion3.htm#:~:text=Un%20sistema%20de%20inecuaciones%20lineales,vac%C3%ADa%2C%20el%20sistema%20es%20incompatible.

Avila, J. (jueves de 1 de 2021). *Descartes*. Obtenido de http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Derivada_de_una_funcion/Derivada_de_una_funcion.htm#:~:text=La%20derivada%20es%20el%20resultado,no%20derivable%20en%20ese%20punto.

concepto de inecuacion. (jueves de enero de 2021). Obtenido de concepto de inecuacion: http://agrega.educacion.es/repositorio/13032014/0c/es_2013120513_9183124/concepto_de_inecuacin.html#:~:text=En%20estas%20expresiones%20se%20utilizan,que%20la%20desigualdad%20sea%20cierta.&text=Por%20tanto%2C%20la%20inecuaci%C3%B3n%20es,un%20n%C3%BAmero%20

EDCVINFORMATICA. (jueves de 1 de 2021). Obtenido de https://sites.google.com/site/edcvinformatica/home/tablas-de-frecuencia-matematicas

Leo. (07 de 09 de 2012). *Importancia.org.* Obtenido de Importancia.org.: https://www.importancia.org/matematica.php

Marta. (10 de junio de 2018). *Superprof.* Obtenido de https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/funciones/limites.html

Martha. (22 de noviembre de 2019). *superprof.* Obtenido de superprof: https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebra/polinomios/division-de-polinomios.html#:~:text=Cuando%20dividimos%20un%20polinomio%20por,del%20polinomio%20entre%20el%20n%C3%BAmero

MatematicaTuya.com. (jueves de 1 de 2021). Obtenido de MatematicaTuya.com: http://matematicatuya.com/GRAFICAecuaciones/S3.html

Montereyinstitute. (jueves de 1 de 2021). Obtenido de Montereyinstitute: https://www.montereyinstitute.org/courses/DevelopmentalMath/TEXTGROUP-1-19_RESOURCE/U13_L2_T3_text_container_es.html

Montereyinstitute. (jueves de 1 de 2021). Obtenido de Montereyinstitute: https://www.montereyinstitute.org/courses/DevelopmentalMath/TEXTGROUP-1-19_RESOURCE/U13_L2_T3_text_container_es.html#:~:text=Las%20rectas%20perpendiculares%20son%20dos,tambi%C3%A9n%20se%20llaman%20%C3%A1ngulos%20rectos.&text=%C2%A1Cuando%20las%20rectas%20

profesor en linea. (jueves de enero de 2021). Obtenido de profesor en linea: https://www.profesorenlinea.cl/matematica/logaritmo.html#:~:text=El%20logaritmo%20de%20un%20n%C3%BAmero,base%20para%20obtener%20el%20n%C3%BAmero.&text=Esto%20significa%20que%20una%20potencia,se%20puede%20expresar%20como%20potencia.

S., I. Y. (jueves de 01 de 2020). *monografias.com*. Obtenido de monografias.com: https://www.monografias.com/trabajos106/expresiones-algebraicas/expresiones-algebraicas.shtml

Serra, B. R. (jueves de 1 de 2014). Obtenido de https://www.universoformulas.com/estadistica/descriptiva/#:~:text=La%20estad%C3%ADstica%20descriptiva%20es%20la,medidas%20de%20resumen%2C%20tablas%20o

Serra, B. R. (jueves de 1 de 2014). Obtenido de https://www.universoformulas.com/estadistica/descriptiva/media/#:~:text=La%20media%20x%20(tambi%C3%A9n%20llamada,el%20n%C3%BAmero%20total%20de%20datos.

Serra, B. R. (jueves de 1 de 2014). Obtenido de https://www.universoformulas.com/estadistica/descriptiva/mediana/

Serra, B. R. (jueves de 1 de 2014). Obtenido de https://www.universoformulas.com/estadistica/descriptiva/moda/

Serra, B. R. (jueves de 1 de 2014). Obtenido de https://www.universoformulas.com/estadistica/descriptiva/diagrama-tallo-hojas/

Serra, B. R. (jueves de 1 de 2014). *Universo Formulas*. Obtenido de https://www.universoformulas.com/estadistica/descriptiva/#:~:text=La%20estad%C3%ADstica%20descriptiva%20es%20la,medidas%20de%20resumen%2C%20tablas%20o

Serra, B. R. (jueves de 1 de 2014). *Universo Formulas*. Obtenido de https://www.universoformulas.com/estadistica/descriptiva/media/#:~:text=La%20media%20x%20(tambi%C3%A9n%20llamada,el%20n%C3%BAmero%20total%20de%20datos.

Superprof. (jueves de 1 de 2021). Obtenido de https://www.superprof.es/diccionario/matematicas/estadistica/medidas-posicion.html

Superprof. (jueves de 1 de 2021). Obtenido de https://www.superprof.es/diccionario/matematicas/estadistica/medidas-posicion.html

Superprof. (jueves de 1 de 2021). Obtenido de https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/estadistica/descriptiva/deciles.html

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE BABAHOYO

EDITORIAL UNIVERSIDAD TÉCNICA DE BABAHOYO

UNIVERSIDAD TÉCNICA DE BABAHOYO

ISBN: 978-9942-8949-9-1

Por ti UTB